This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/

Dette er en digital kopi af en bog, der har været bevaret i generationer på bibliotekshylder, før den omhyggeligt er scannet af Google som del af et projekt, der går ud på at gøre verdens bøger tilgængelige online.

Den har overlevet længe nok til, at ophavsretten er udløbet, og til at bogen er blevet offentlig ejendom. En offentligt ejet bog er en bog, der aldrig har været underlagt copyright, eller hvor de juridiske copyrightvilkår er udløbet. Om en bog er offentlig ejendom varierer fra land til land. Bøger, der er offentlig ejendom, er vores indblik i fortiden og repræsenterer en rigdom af historie, kultur og viden, der ofte er vanskelig at opdage.

Mærker, kommentarer og andre marginalnoter, der er vises i det oprindelige bind, vises i denne fil - en påmindelse om denne bogs lange rejse fra udgiver til et bibliotek og endelig til dig.

Retningslinjer for anvendelse

Google er stolte over at indgå partnerskaber med biblioteker om at digitalisere offentligt ejede materialer og gøre dem bredt tilgængelige. Offentligt ejede bøger tilhører alle og vi er blot deres vogtere. Selvom dette arbejde er kostbart, så har vi taget skridt i retning af at forhindre misbrug fra kommerciel side, herunder placering af tekniske begrænsninger på automatiserede forespørgsler for fortsat at kunne tilvejebringe denne kilde.

Vi beder dig også om følgende:

- Anvend kun disse filer til ikke-kommercielt brug
  Vi designede Google Bogsøgning til enkeltpersoner, og vi beder dig om at bruge disse filer til personlige, ikke-kommercielle formål.
- Undlad at bruge automatiserede forespørgsler
  Undlad at sende automatiserede søgninger af nogen som helst art til Googles system. Hvis du foretager undersøgelse af maskinoversættelse, optisk tegngenkendelse eller andre områder, hvor adgangen til store mængder tekst er nyttig, bør du kontakte os. Vi opmuntrer til anvendelse af offentligt ejede materialer til disse formål, og kan måske hjælpe.
- Bevar tilegnelse
  Det Google-"vandmærke" du ser på hver fil er en vigtig måde at fortælle mennesker om dette projekt og hjælpe dem med at finde yderligere materialer ved brug af Google Bogsøgning. Lad være med at fjerne det.
- Overhold reglerne
  Uanset hvad du bruger, skal du huske, at du er ansvarlig for at sikre, at det du gør er lovligt. Antag ikke, at bare fordi vi tror, at en bog er offentlig ejendom for brugere i USA, at værket også er offentlig ejendom for brugere i andre lande. Om en bog stadig er underlagt copyright varierer fra land til land, og vi kan ikke tilbyde vejledning i, om en bestemt anvendelse af en bog er tilladt. Antag ikke at en bogs tilstedeværelse i Google Bogsøgning betyder, at den kan bruges på enhver måde overalt i verden. Erstatningspligten for krænkelse af copyright kan være ganske alvorlig.

Om Google Bogsøgning

Det er Googles mission at organisere alverdens oplysninger for at gøre dem almindeligt tilgængelige og nyttige. Google Bogsøgning hjælper læsere med at opdage alverdens bøger, samtidig med at det hjælper forfattere og udgivere med at nå nye målgrupper. Du kan søge gennem hele teksten i denne bog på internettet på `http://books.google.com`

NYPL RESEARCH LIBRARIES
3 3433 06273098 5

Nyt

Tidsskrift for Matematik.

Redigeret

af

cand. mag. **P. T. Foldberg** og dr. phil. **C. Juel.**

Afdeling A.

Fjerde Aargang.

København.

Ludvig Jørgensens Bogtrykkeri. Amagertorv 10.

1893.

THE NEW YORK PUBLIC LIBRARY
35266
ASTOR, LENOX AND TILDEN FOUNDATIONS.
1897.

THE ASTOR LIBRARY.

Indhold.

Side

N. B.
Løsninger af Opgaverne til Skolelærerindeeksamen 81
A. S. Bang, cand. mag.
Om en Sætning af Fermat 105
Litteratur Anmeldelse.
Opgaver til Løsning Nr. 199—200.
S. Bentzon, stud. jur.
Opgaver til Løsning Nr. 195.
Løste Opgaver Nr. 151, 183.
Magnus Berg, Lærer, Framnes, Norge.
Løsninger af Opgaverne til Middelskoleexamen i Norge 33
T. Bonnesen, stud. mag.
Opgaver til Løsning Nr. 182—83.
Løste Opgaver Nr. 149—50.
J. Byskov, Seminarielærer, Gjedved.
Løsninger af Opgaverne til Skolelærereksamen 45
Opgave til Løsning Nr. 194.
Løste Opgaver Nr. 186, 187, 189.
J. C. Carlsen, Matematiklærer.
Opgaver til Løsning Nr. 171—73.
Løste Opgaver Nr. 157—59, 161, 164—66.
C. Crone, dr. phil., Lærer ved Søofficersskolen.
Opgaver til Løsning Nr. 168—69.
C. Dahl, Inspektør ved Borgerdydskolen. V.
En Permutationsopgave 26
Kr. Fischer, Seminarieelev, Gjedved.
Løst Opgave Nr. 196.
P. T. Foldberg, cand. mag.
Om Definitionen paa Multiplikation med en Brøk 108
Litteratur-Anmeldelser.
Opgave til Løsning Nr. 158.
Chr. Hansen, Rektor, Hjørring.
Fysikens Definitioner 17
Atter »Et geometrisk Sted« 90
P. Hassing, Realskolebestyrer, Faaborg.
Løste Opgaver Nr. 154, 156.
P. Heegaard, cand. mag.
Opgaver til Løsning Nr. 170, 184.
A. Hertz, stud. polyt.
Bevis for, at en Trekant, hvori to Vinkelhalverende ere ligestore, maa være ligebenet 55
L. J.
Opgave til Løsning Nr. 167.
A. Jordan.
Opgave til Løsning Nr. 181.

Side

C. Juel, dr. phil.
Afsluttende Bemærkninger til Hr. cand. Niels Nielsen 54
Elementære Bestemmelser af Maksimum og Minimum 130
Opgave til Løsning Nr. 185.
P. A. Larsen, cand. mag.
Opgave til Løsning Nr. 159.
Løst Opgave Nr. 149.
Adolf Lomholt, Adjunkt, Viborg.
Opgaver til Løsning Nr. 156—57.
M. C. Madsen, exam. polyt., Lærer ved Navigationsskolen i Rønne.
Løste Opgaver Nr. 147—48, 157—58.
Theodor Ney, Ingeniør, Gøteborg.
Løste Opgaver Nr. 147—49, 151.
H. S. Nielsen, stud. mag.
Opgaver til Løsning Nr. 174—75.
Løste Opgaver Nr. 147, 152—54, 157—59, 161—63, 165, 168—69, 171—73, 177—80, 194.
Niels Nielsen, cand. mag.
Et Punkts Polar med Hensyn til en Cirkel 1
En Replik til Hr. dr. Juel 49
Opgaver til Løsning Nr. 160—64.
H. C. Olsen, stud. mag.
Løste Opgaver Nr. 72, 89, 147, 151, 154—55, 157—61, 163, 166—67, 174—75, 177—83, 192, 194, 196—97.
W. van Roekel, Redaktør af »Archimedes«, Arnhem, Holland.
Løste Opgaver Nr. 157—58.
C. E. Schlichtkrull, cand. polit., Roeskilde.
Løste Opgaver Nr. 162—63, 167—68, 172, 174—75, 178—80.
P. Schrøder, stud. polyt.
Løste Opgaver Nr. 157—58, 162—63, 165.
O. A. Smith, stud. mag.
Løste Opgaver 157, 162—63.
F. V. Tryde, Realskolelærer, Hørsholm.
Løste Opgaver Nr. 157, 159.
Aage Willumsen, Roeskilde.
Løste Opgaver Nr. 176, 193.
— d. — v.
Løste Opgaver Nr. 160, 162—63, 165—66.
Chr. M. A. Østergaard.
Løste Opgaver 177, 186, 191.
Åsted, Adjunkt, Rønne.
Et Bevis for Eulers Sætning 139

Oversat Arbejde.

Matematikens Udvikling i Sammenhæng med Kulturens Udbredelse . . 121

Referat.

Annales de l'Observatoire magnétique de Copenhague 140

Side

Litteraturanmeldelser.

Archimedes, Tijdschrift vor lagere Wiskunde 93
Arithmetische Aufgaben von Dr. H. Lieber u. Dr. A. Köhler, mit Auflösungen 93
Eksamensopgaver i Regning og geom. Tegning, udg. af J. Rasmussen . 94
Lærebog i Regning I, af Baden & Johnsen 150

Opgaver til Løsning.

Nr. 156—58 16
- 159—66 32
- 167—85 61
- 186—93 95
- 194—98 120
- 199—200 160

Løste Opgaver.

Nr. 72, 147—50, 152, 153 11
- 151, 154—56 29
- 89, 157—66 56
- 168, 169, 171—73, 175 78
- 176 95
- 167, 174, 175, 177—80, 186—89 115
- 181—83, 191—94, 196—98 153

Danske Eksamensopgaver.

Almindelig Forberedelseseksamen (Januar 1893) 7
— — (Marts —) 27
— — (Juni —) 75
— — (Oktober —) 87
Afgangseksamen for studerende (Januar 1893) 4
— — (Juni —) 70
Søofficersskolens Overgangsprøve (Foraaret 1893) 43
Skolelærereksamen 45
Ekstraordinær Skolelærereksamen 81
Skolelærerindeeksamen 81
Adgangseksamen til polyteknisk Læreanstalt 65
Landinspektør- og Skovbrugseksamen 147

Svenske Eksamensopgaver.

Mogenhetsexamen (vårterminen 1893) 35
— (höstterminen 1893) 97

Norske Eksamensopgaver.

Middelskoleexamen 1892 33

Bøger tilsendte Redaktionen 80, 96

Rettelse 64

Et punkts polar med hensyn til en cirkel.

(Af cand. mag. Niels Nielsen.)

---

1. Det geometriske sted for de punkter, der har samme potenser med hensyn til to givne cirkler, er som bekendt en ret linje, vinkelret paa cirklernes centerlinje. Den kaldes cirklernes radikalaxe. (Se Petersen: Methoder og Theorier.)

Der er givet et vilkaarligt punkt O og en cirkel med centrum i C; idet vi tegner en ny Cirkel over OC som diameter, vil vi kalde de to cirklers radikalaxe for O's polar med hensyn til den givne cirkel, O kaldes linjens pol.

Polaren staar altsaa vinkelret paa forbindelseslinjen mellem polen og centret.

Dersom en vilkaarlig ret linje gennem O skærer O's polar i E og cirklen med OC til diameter i D, vil vi kalde produktet OD . OE for O's polarpotens med hensyn til den givne cirkel.

2. Et punkts potens med hensyn til en cirkel er lig med punktets polarpotens med hensyn til samme cirkel.

Vi maa skælne mellem to tilfælde, eftersom punktet falder indenfor eller udenfor cirklen; men de kan behandles paa samme maade, som vi ...

Øverste forteg ... følgende for første tilfælde, nederste ... nde betegnelser:

Linjen DE ska ... OC

skærer den i G og H; F er skæringspunktet mellem GH og O's polar.

Da punktet F's potens med hensyn til de to cirkler skal være ligestor, haves altsaa:

$$FO \,.\, FC = \pm(\overline{FC}^2 - \overline{CG}^2);$$

altsaa:
$$\overline{CG}^2 = FC\,(FC \mp FO)$$

eller:
$$\overline{CG}^2 = FC \,.\, OC.$$

Af en figur ses umiddelbart, at man har:

$$FC = OC \pm OF;$$

$$\overline{CG}^2 = \overline{OC}^2 \pm OC \,.\, OF.$$

I følge den bekendte potenssætning faas da:

$$OC \,.\, OF = OG \,.\, OH. \qquad (1)$$

Da vinklerne CDO er rette, har man:

$$\triangle\, OCD \sim \triangle\, OEF;$$

altsaa:
$$\frac{OD}{OF} = \frac{OC}{OE}$$

eller:
$$OD \,.\, OE = OF \,.\, OC. \qquad (2)$$

I følge potenssætningen haves:

$$OG \,.\, OH = OA \,.\, OB. \qquad (3)$$

Altsaa faas af (1), (2) og (3):

$$OA \,.\, OB = OD \,.\, OE. \qquad (4)$$

q. e. d.

3. Trækkes gennem O vilkaarlige linjer, og bestemmes paa hver af dem et punkt, der er harmonisk forbundet med O med hensyn til linjens skæringspunkter med cirklen, vil dette punkts geometriske sted være O's polar.

Idet AB er en saadan vilkaarlig linje gennem O, faas:

$$OE = OA + AE;$$

altsaa af (4):

$$OA \,.\, OB = OD\,(OA + AE)$$

$$OA\,(OB - OD) = OD \,.\, AE$$

$$OA \,.\, DB = OD \,.\, AE. \qquad (5)$$

I lige maade faas:

$$OE = \pm(EB - OB);$$

altsaa af (4): $OA . OB = \pm OD (EB - OB)$

$\pm OD . EB = OB (OA \pm OD)$

$OD . EB = OB . AD.$ (6)

Da AD = DB, fordi vinklen ved D er ret, faas af (5) og (6)

$$\frac{OA}{OB} = \frac{EA}{EB}.$$ q. e. d.

4. Dersom et punkt ligger paa et andet punkts polar, ligger det andet ogsaa paa det førstes polar.

E ligger f. ex. paa polaren til O; men da E og O er harmonisk forbundet med hensyn til A og B, maa polaren for E gaa gennem O.*) q. e. d.

Af 4 følger umiddelbart:

5. Skæringspunktet mellem to rette linjer er pol for linjen gennem de to givne linjers poler.

6. Forbindelseslinjen mellem to punkter er polar for skæringspunktet mellem de givne punkters polarer.

7. Dersom vi ved konstruktionen af en cirkel ved »en betingelse« forstaar at cirklen 1) skal gaa gennem et givet punkt eller 2) røre en given linje, vil det, at vi kender en pol og dens tilsvarende polar, svare til to »betingelser«. Det overlader vi til læseren selv at finde ved løsning af følgende opgaver:

α) Konstruer en cirkel, naar man kender et af dens punkter A, samt et punkt B uden for cirklen og dets polar.

β) Konstruer en cirkel, naar den skal gaa gennem to givne punkter A og B, og man desuden kender polaren til et ubekendt punkt paa AB.

γ) Konstruer en cirkel, naar den skal gaa gennem to givne punkter A og B, og man desuden kender retningen af polaren til det givne punkt C.

δ) Man kender et punkt og dets polar med hensyn til en ubekendt cirkel, desuden retningen af et andet givet punkts polar med hensyn til samme cirkel; man skal konstruere:

*) Dette Bevis gælder dog kun, naar Linjen EO skærer Cirklen. (Red.)

1) Polaren til det andet givne punkt.

2) Cirklen, idet polen til den givne polar falder udenfor cirklen.

3) Cirklen, idet polen til den givne polar falder inden for cirklen.

8. Ved at tage centralprojektionen af de givne figurer (lægge en kegle med vilkaarligt toppunkt og den givne cirkel til ledelinje) kan enhver umiddelbart af det ovenfor udviklede udlede de bekendte sætninger om keglesnit, saa det skal jeg ikke opholde mig ved.

Danske Eksamensopgaver.

Afgangseksamen for studerende.

Januar 1893.

Aritmetik

1. Hvilken Ligning vil have a, b og c til Rødder, naar

$$p + aq + a^2r + a^3 = 0,$$
$$p + bq + b^2r + b^3 = 0,$$
$$p + cq + c^2r + c^3 = 0?$$

Find ved Hjælp af denne Ligning p, q og r udtrykte ved a, b og c.

Opløsning. Den søgte Ligning er

$$x^3 + rx^2 + qx + p = 0.$$

Altsaa
$$p = -abc$$
$$q = ab + bc + ca$$
$$r = -(a + b + c).$$

2. Ligningerne

$$8x^2 + 10xy + 3y^2 - 8x - 5y + 8 = 0$$
$$9x^2 + 12xy + 4y^2 - 9x - 6y + 2 = 0$$

skulle løses med Hensyn til x og y.

Opløsning. Lign. (2) — Lign. (1) giver

$$(x+y)^2 - (x+y) - 6 = 0,$$

hvoraf $x + y = 3$ (a) eller $x + y = -2$ (b).

(2) mult. med 8 — (1) mult. med 9 giver

$$6xy + 5y^2 - 3y - 56 = 0,$$

der kombineret med (a) giver

$$y = \begin{cases} 8 \\ 7 \end{cases}, \text{ hvorefter } x = \begin{cases} -5 \\ -4. \end{cases}$$

Kombineres med (b), faar man

$$y = \begin{cases} -7 \\ -8 \end{cases}, \text{ og derefter } x = \begin{cases} 5 \\ 6. \end{cases}$$

Beregningsopgave.

I et konvekst tresidet Hjørne er givet en Toplansvinkel: $147^0\ 13'\ 24''$ samt de 2 indesluttende Sider: $53^0\ 26'\ 49''$.

Find den tredje Side, de 2 andre Vinkler samt den Vinkel, som den givne Toplansvinkels Kant danner med den modstaaende Sideflade.

Opløsning. Hjørnets Sider kalde vi a, b og c, dets Vinkler A, B og C og tænke os givet:

$$a = b = 53^0\ 26'\ 49''$$
$$C = 147^0\ 13'\ 24''.$$

Lægges en Plan vinkelret paa C's Kant i Afstanden 1 fra Hjørnets Toppunkt, faas let

$$\sin\frac{c}{2} = \sin a \,.\, \sin\frac{C}{2},$$
$$c = 100^0\ 49'\ 48''.$$

Lægges igennem samme Punkt en Plan vinkelret paa en af de andre Kanter, samt fældes den vinkelrette paa den modstaaende Sideflade, faas

$$\cos B = \cot a \,.\, \mathrm{tg}\frac{c}{2},$$

der giver $B = 26^0\ 16'\ 40''$.

Endvidere $\sin x = \sin a \sin B$,

hvor x er den tredje forlangte Vinkel.

Man faar: $x = 20^0\ 49'\ 58''$.

Projektionstegning.

Tegn Billederne af et Legeme, som begrænses af følgende 3 Flader: en Cirkel, der rører den vandrette Billedplan, med hvilken den danner en Vinkel paa 45°; en Cylinderflade gennem Cirklen med Frembringerne vinkelrette paa dennes Plan; den vandrette Billedplan. Cirklens Plan maa ikke være vinkelret paa den lodrette Billedplan.

Geometri.

1. Konstruer en Trekant af de to Stykker, hvori den ene Vinkels Halveringslinie deler den modstaaende Side, samt en af de Vinkler, der ligge ved denne Side.

Opløsning. Paa en ret Linie afsættes de to givne Stykker AD og DB, og derefter bestemmes det med D harmonisk forbundne Punkt E m. H. t. A og B. En Halvcirkel over DE som Diameter skærer det andet Ben af Vinklen A (der afsættes ud fra AB) i Trekantens tredje Vinkelspids C.

2. Find en Trekants Sider og Vinkler udtrykte ved en Side (a) og Radierne (r_b og r_c) i de to Røringscirkler, som begge røre den givne Sides Forlængelser.

Opløsning. Cirklernes Centrer kaldes O_b og O_c; Cirklen O_c røre CA's Forlængelse i D, CB's Forlængelse i E; Cirklen O_b røre CA i F, BC's Forlængelse i G. Da er

$$DF = a, \quad DA = s - b = \frac{a \cdot r_c}{r_b + r_c},$$

hvoraf

$$b - c = \frac{a\,(r_b - r_c)}{r_b + r_c}. \qquad (1)$$

Endvidere $\quad EG = b + c.$

$$\overline{O_c O_b}^2 = a^2 + (r_b + r_c)^2 = (b + c)^2 + (r_b - r_c)^2,$$

$$b + c = \sqrt{a^2 + 4 r_b r_c}. \qquad (2)$$

Af (1) og (2) findes b og c.

$\angle\ AO_bF = \frac{A}{2}$, derfor

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{s - c}{r_b} = \frac{a}{r_b + r_c}.$$

$$\operatorname{tg}\frac{B - C}{2} = \frac{b - c}{b + c}\cot\frac{A}{2} = \frac{r_b - r_c}{\sqrt{a^2 + 4r_b r_c}}.$$

Dermed ere Vinklerne bestemte.

3. Find Ligningerne for to Cirkler, som begge gaa gennem Begyndelsespunktet og Punktet (0, a), medens den ene tillige gaar gennem Punktet (b, 0), den anden gennem (c, 0).

Find dernæst Ligningen for det geometriske Sted for Midtpunktet af en vilkaarlig Linie MN gennem Begyndelsespunktet, naar M og N ere dens andre Skæringspunkter med Cirklerne.

Opløsning. Cirklernes Ligninger ere

$$x^2 + y^2 - bx - ay = 0$$

og

$$x^2 + y^2 - cx - ay = 0.$$

Linien $y = \alpha x$ (1) skærer dem i Punkter, hvis Abscisser ere henholdsvis

$$x_1 = \frac{b + a\alpha}{1 + \alpha^2} \text{ og } x_2 = \frac{c + a\alpha}{1 + \alpha^2},$$

saa at Abscissen til Midtpunktet af MN er

$$x = \frac{b + c + 2a\alpha}{2(1 + \alpha^2)}. \qquad (2)$$

Elimination af α ml. (1) og (2) giver den søgte Ligning for Stedet

$$x^2 + y^2 = \frac{b + c}{2}x + ay.$$

Almindelig Forberedelseseksamen.

Januar 1893.

Aritmetik.

1. I en Række Aar tjener en Købmand hvert Aar 290 Kr. 25 Øre mere, end han tjente det nærmest foregaaende Aar. Naar hans [illegible] 18 Aar har været 78990 Kr.

75 Øre ialt, hvor meget har han da tjent det første Aar, hvor meget det sidste?

2. Find x af Ligningen

$$(a x)^{\log x} = x^n.$$

Ekspl. $a = 25$, $n = 2$.

Der skal gøres Prøve med de fundne Værdier af x.

3. For hvilke Værdier af x bliver

$$y = \sqrt{13x - 2x^2 - 15}$$

lig med Nul, for hvilke reel, og for hvilke imaginær?

Opløsning. 1. I Formlerne

$$s = \frac{n}{2}(a + u)$$

$$u = a + (n - 1)d$$

indsættes $s = 78990{,}75$, $n = 18$, $d = 290{,}25$, hvorefter let findes $a = 1921{,}25$ og $u = 6855{,}50$, der ere de søgte Antal Kroner.

2. Ved at tage Logaritmen omskriver man Ligningen til

$$\log x (\log a + \log x) = n \log x$$

eller

$$\log x (\log a - n + \log x) = 0,$$

der tilfredsstilles af [1]) $\log x = 0$, $x = 1$,

[2]) $\log x = n - \log a$, $x = \frac{10^n}{a}$,

i Eksemplet $x = 4$.

Prøve. [1]) $25^0 = 1^2$, $1 = 1$.

[2]) $100^{\log 4} = 4^2$, $(10^{\log 4})^2 = 4^2$, $4^2 = 4^2$.

3. $13x - 2x^2 - 15 = 0$ tilfredsstilles af $x = \begin{cases} 5 \\ \frac{3}{2} \end{cases}$.

Derfor kan det givne omskrives til

$$y = \sqrt{(x - 5)(3 - 2x)}.$$

y bliver Nul for de ovenfor fundne Værdier af x.

y bliver reel, naar $5 > x > \frac{3}{2}$, imaginær, naar $x > 5$ eller naar $x < \frac{3}{2}$.

Geometri.

1. Konstruer en Trekant, naar to af dens Vinkler og dens omskrevne Cirkels Radius ere givne.

2. Find Længden af en Drivrem, der ligger stramt om to Hjul, hvis Radier ere henholdsvis 5 Fod og 1 Fod, og hvis Centerlinie er 8 Fod.

3. I en Trekant ABC er D Midtpunktet af AB, og E et Punkt paa BC beliggende saaledes, at BE er dobbelt saa stor som EC. Bevis, at Linien DE's Forlængelse skærer AC's Forlængelse i et saadant Punkt F, at CF = AC.

Opløsning. 1. Man tegner en Trekant med de to givne Vinkler, idet den mellemliggende Side vælges vilkaarligt, og bestemmer denne Trekants omskrevne Cirkel. Figuren er da ligedannet med den søgte, hvilken let bestemmes, idet man tager Centrum til Fællespunkt.

2. Forskydes Tangenten parallelt til den gaar gennem den lille Cirkels Centrum, fremkommer der en retvinklet Trekant med Hypotenusen 8', Kateten 4', altsaa den mellemliggende Vinkel 60^0, og den anden Katete $4\sqrt{3}'$.

Drivremmens Længde er da

$$\frac{2\pi . 5 . 240}{360} + 4\sqrt{3} + \frac{2\pi . 1 . 120}{360} + 4\sqrt{3}$$

$$= 36{,}89'.$$

3. Trækkes CM ≠ AB, bliver

$$\frac{CM}{AD} = \frac{FC}{FA};$$

og

$$\triangle\ CEM \sim \triangle\ BED,$$

hvoraf

$$\frac{CM}{DB} = \frac{EC}{BE} = \frac{1}{2} = \frac{CM}{AD},$$

altsaa

$$\frac{FC}{FA} = \frac{1}{2},\quad FC = CA.$$

Praktisk Regning.

1. Den 1ste Januar 1890 begyndte A og B en Forretning,

[2]) Planer parallele med den givne skærer Keglerne i Cirkler. En saadan Plan gennem Skæringspunktet P af MN og den vinkelrette paa den givne Plan gennem D skærer Keglerne i 2 Cirkler med samme Radier, altsaa kongruente Snit. Skærer nemlig Planen MD i Q og ND i R har man $\triangle DPQ \cong \triangle DPR$, altsaa $PQ = QR$. Tog man Normalen gennem C i Stedet for gennem D, fik man selve den givne Plan.

(H. C. Olsen.)

147. Bevis, at Tangenten til et Keglesnit er Median i den Trekant, der dannes af Linierne fra Tangentens Røringspunkt til den store (første) Akses Endepunkter og Tangenten til et af disse Punkter.

Opløsning. Tages Toppunktet til Begyndelsespunkt, er Tangentens Ligning

$$2y\eta = p(x + \xi) + 2qx\xi,$$

idet $$\eta^2 = p\xi + q\xi^2.$$

Skæringsordinaten ml. Tangenten og Y er

$$y = \frac{p\xi}{2\eta},$$

[for Parablens Vedkommende $= \frac{\eta}{2}$, hv. sk. bev.]

Forbindelseslinien ml. Røringspunktet og det andet Toppunkt har Ligningen

$$y = \frac{\eta}{\xi \mp 2a}(x \mp 2a),$$

den skærer Y i et Punkt med Ordinaten $\frac{\mp 2a\eta}{\xi \mp 2a}$.

Sætningens Rigtighed er da bevist, saafremt

$$\frac{p\xi}{2\eta} = \frac{\mp a\eta}{\xi \mp 2a}$$

eller $$p\xi^2 \mp 2ap\xi = \mp 2a\eta^2 = \mp 2ap\xi \mp 2aq\xi^2;$$

dette fører til Identiteten.

$$p = \mp 2aq.$$

(Løst af M. C. Madsen, H. C. Olsen, H. S. Nielsen samt Theodor Ney.)

148. To Tangenter til en Ellipse have Ligningerne

$$\left.\begin{aligned}4x + 5y &= 25\\ 9x + 20y &= 75\end{aligned}\right\}$$

Bestem Ellipsen, hvis Akser falde sammen med Koordinatakserne.

Opløsning. Sammenlignes Ligningerne skrevne paa Formen

$$\left.\begin{aligned}\frac{4}{25}x + \frac{1}{5}y &= 1\\ \frac{3}{25}x + \frac{4}{15}y &= 1\end{aligned}\right\}$$

med Tangentens almindelige Ligning $\frac{mx}{a^2} + \frac{ny}{b^2} = 1$, faas

$$\frac{m_1}{a^2} = \frac{4}{25},\ \frac{n_1}{b^2} = \frac{1}{5},\ \text{og}\ \frac{m_2}{a^2} = \frac{3}{25},\ \frac{n_2}{b^2} = \frac{4}{15}.$$

Deraf faas atter

$$m_1 = \frac{4a^2}{25},\quad n_1 = \frac{b^2}{5};\quad m_2 = \frac{3a^2}{25},\quad n_2 = \frac{4b^2}{15}.$$

Indsættes disse Værdier i Ellipsens alm. Lign., faas henhv.

$$\frac{16a^4}{25^2a^2} + \frac{b^4}{5^2b^2} = 1 \ \text{og}\ \frac{9a^4}{25^2a^2} + \frac{16b^4}{15^2b^2} = 1,$$

hvoraf $a^2 = 25,\ b^2 = 9.$

Den søgte Ellipse er da

$$\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1.$$

(M. C. Madsen.)

(Ogsaa løst af Theodor Ney.)

149. En Mand er Fader til 7 Sønner, som alle leve; de følge efter hinanden med en konstant Aldersforskjel af 3 Aar. Summen af Sønnernes Alder er nu lige det dobbelte af Faderens Alder, men for 9 Aar siden var Faderens Alder netop lig Summen af hans Sønners Aldere. Hvor gammel er nu Faderen og hver af hans Sønner?

Opløsning. Antages, att den yngste sonen är x år gammal, så fås först eqv.

$$7x + 63 = 2y \qquad (1)$$

Antages vidare, att för 9 år sedan n utaf sönerna lefde, fås eqv.

$$\frac{n}{2}[2(x+18)-(n-1).3]-9n = y-9, \qquad (2)$$

som hyfsad ger

$$2nx-2y+21n-3n^2+18 = 0. \qquad (2)$$

Eqvationerne (1) och (2) gifva

$$x = 3.\frac{n^2-7n+15}{2n-7},$$

hvilken expression ger vid handen att 2n måste vara > 7 d. v. s. $n > \frac{7}{2}$ eller, då n måste vara ett helt tal

$$n \overline{\overline{>}} 4.$$

De enda acceptabla värdena på n äro alltså 4, 5, 6 och 7. Insättas dessa värden i ofvanstående expression så fås

$$\text{för } n = 4, = 5, = 6, = 7.$$
$$x = 9, = 5, = \tfrac{27}{5}, = \tfrac{45}{7},$$

hvaraf endast $x = 5$ duger. Sönernas ålder blir altså 5, 8, 11, 14, 17, 20 och 23 år samt fadrens ålder 49 år.

(Theodor Ney.)

(Ogsaa løst af P. A. Larsen, T. Bonnesen.)

150. Bevis Sætningen: I en vilkaarlig Trekant skære følgende Linier hverandre i et Punkt, Medianen fra Vinkelspidsen A, A's Polar m. h. t. Trekantens indskrevne Cirkel og en Linie gennem denne Cirkels Centrum vinkelret paa Siden a.

Opløsning. Sætningen indses lettest i sin almindeligere Form: Et Keglesnit er indskrevet i en Trekant ABC, D og E paa BC skille B og C harmonisk; AD og Polaren for E skære da hinanden paa Polaren for A. Polen for AE ligger nemlig paa Polarerne for A og E. Linien gennem A og denne Pol er harmonisk forbunden med AE m. h. t. AB og AC, ɔ: denne Linie er AD. I det specielle Tilfælde ere de to Punkter D og E, henholdsvis Midtpunktet af og det uendelig fjærne Punkt paa BC; dette sidste Punkts Polar m. h. t. en indskreven Cirkel er en vinkelret i Røringspunktet med BC.

(T. Bonnesen.)

152. Find Værdien af det uendelige Produkt

$$\frac{a+1}{a}\cdot\frac{a^2+1}{a^2}\cdot\frac{a^4+1}{a^4}\cdots\cdots\frac{a^{2^n}+1}{a^{2^n}}\cdots\ (a > 1).$$

Opløsning. Sættes $\frac{1}{a} = b$, hvor altsaa $b < 1$, er

$$\frac{a+1}{a}\cdot\frac{a^2+1}{a^2}\cdot\frac{a^4+1}{a^4}\cdots\cdot\frac{a^{2^n}+1}{a^{2^n}}\cdots\cdot$$

$$= (1+b)(1+b^2)(1+b^4)\ldots(1+b^{2^n})\cdots\cdot$$

$$= 1+(b+b^2+b^4\ldots b^{2^n}+\ldots)$$

$$+(bb^2+bb^4\ldots b^2b^4+b^2b^8+\ldots\ldots b^{2^{n-1}}b^{2^n}\ldots.)$$

$$+(bb^2b^4+\ldots b^{2^{n-2}}b^{2^{n-1}}b^{2^n}\ldots)+\ldots.+bb^2b^4\ldots.b^{2^n}\ldots.$$

Antages det nu, at det sidste Led, som er medtaget i det oprindelige Produkt er $\frac{a^{2^n}+1}{a^{2^n}}$, ses det, at Antallet af Led i det udviklede Produkt er $= 1 + K_{n+1,1} + K_{n+1,2} + \ldots K_{n+1,n} + 1 = 2^{n+1}$. Dette gælder ogsaa, naar Rækken fortsættes i det uendelige. Det største af Leddene i det udviklede Produkt (Leddet 1 ikke medregnet) har Eksponenten 1, det mindste Eksponenten $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots 2^n = 2^{n+1} - 1$. Betragter man nu Tallene

$$1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32\ldots.2^n\ldots.$$

ser man, at et vilkaarligt af dem ikke kan fremkomme ved at summere et Antal af de øvrige, thi hvert af dem er > Summen af alle de foregaaende; følgelig kan man heller ikke ved at summere n af dem faa en Sum, der ogsaa kan faas ved at summere et Antal af de øvrige. Altsaa vil man ved at summere 1 og 1, 2 og 2, 3 og 3 .... $(n+1)$ og $(n+1)$ af ovenstaaende Tal indtil 2^n faa lutter forskellige Tal, men det er bevist, at Antallet af disse Tal er $= 2^{n+1} - 1$ og at det mindste er 1 og det største $2^{n+1} - 1$. Da de alle ere hele Tal, maa det altsaa være Tallene $1, 2, 3 \ldots (2^{n+1} - 1)$. Men da bliver ovenstaaende Produkt til

$$1+b+b^2+b^3+b^4+b^5+\ldots.b^{(2^{n+1}-1)}+\ldots.$$

$$= \frac{1}{1-b} = \frac{1}{1-\frac{1}{a}} = \frac{a}{a-1}.$$

(H. S. Nielsen.)

155. Søg Grænseværdien af Brøken $\frac{a - \sqrt[3]{a^3 + x}}{x}$ for $x = 0$.

Opløsning. Sættes

$$\sqrt[3]{a^3 + x} = a + z,$$

er
$$x = z^3 + 3a^2z + 3az^2,$$

hvor
$$x = 0 \text{ for } z = 0.$$

$$\frac{a - \sqrt[3]{a^3 + x}}{x} = -\frac{z}{z^3 + 3a^2z + 3az^2}$$

$$= -\frac{1}{z^2 + 3a^2 + 3az}.$$

Altsaa
$$\lim_{x=0} \left(\frac{a - \sqrt[3]{a^3 + x}}{x}\right) = -\frac{1}{3a^2}.$$

(H. S. Nielsen.)

Opgaver til Løsning.

156. Find Summen af Sider og Diagonaler i en regulær n-kant, udtrykt ved største Radius.

(Adolf Lomholt.)

157. Konstruer en Trekant af Arealet, en Vinkel og Medianen til den modstaaende Side.

(Samme.)

158. Ved Operation med to oprindelig lige store Kapitaler tabes stadigt, paa den ene 10 % p. a., paa den anden 19 % p. a. Hvor naar bliver Forskellen mellem Kapitalerne saa stor som muligt — og hvor stor er da denne Forskel?

(F.)

Fysikkens Definitioner.*)

(Af Chr. Hansen.)

Ofte, naar jeg har læst en Kritik og maattet beundre den af Kritikeren for Dagen lagte Omhu for ikke at lade selv de for det kritiserede Arbejdes væsentlige Indhold betydningsløse Fejl staa upaatalte hen, har jeg, og dette derfor end mere, beundret den gennemgaaende Utilbøjelighed, som Kritikerne have til at røre ved visse væsentlige Fejl eller Uklarheder, som fandtes i de Bøger, hvorefter de som Elever undervistes, og som igennem flere Led ere gaaede i Arv til dem, hvorefter de nu som Lærere undervise. Man sammenligne for at tage et Eksempel dette Tidsskrifts Afdeling A for 1890, Side 44, L. 9 f. n. — Side 45, L. 3 f. o. med sammes Afdeling A for 1891, Side 114—126.

Det er navnlig i Retning af *Definitioner*, man synes at have i de *eksakte* Fag en større Respekt for det *nedarvede* end for det eksakte. Jeg har engang læst eller hørt, at man i disse Fag skal kunne definere, som man vil, naar blot man ikke efter Definitionen kommer med noget, der strider imod den, men hvor sandt end dette synes, er det dog usandt; thi hvor tro man end bliver sin Definition, kan man dog, og *netop derved*, komme til at bevise, at man er kommen paa Afveje, nemlig naar *selve Definitionen* er gal. Men naar selve Definitionen *kan* være gal, saa kan man altsaa *ikke* definere, som man vil. Nej, det kan man ganske sikkert ikke; thi man har jo to Slags Definitioner, *aprioriske* og *aposterioriske*, af hvilke de første skabe nye Begreber, medens de sidste gaa ud paa en stringent Sætten i Ord af forud skabte Begreber.

Den første Slags Definitioner kan man (naturligvis kun i

*) Undervisningsinspektionen for de lærde Skoler siger i sin sidste Betænkning: »Nogle Censorer klage over, at der ikke altid ved Eksaminationen lægges tilstrækkelig Vægt paa klare og bestemte Definitioner af de fysiske Begreber.«

Ord, der give Mening) affatte, som man vil; man maa da blot ikke senere selv afskaffe dem og anskaffe sig nye enten af saakaldte »praktiske« eller »pædagogiske« Hensyn [1]) eller, fordi de vise sig ikke at kunne bære hele den logiske Bygning, man har troet paa dem at kunne opføre. Den anden Slags Definitioner derimod kan man ikke sætte i Ord, som man vil, idet man ved dem først og fremmest maa sørge for, at de ikke tilsløre eller forvanske de Begreber, som de give sig Udseende af at ville klare. F. Eks. man kan definere $\sqrt{a^2}$ enten som $\pm$ a eller som a, fordi man ikke derom forud har noget Begreb; men har man først valgt den ene af disse Definitioner, da kan man ikke kort efter indføre den anden og bruge dem begge skiftevis efter eget Behag eller andres Vedtægt uden derved at ophøre med at være eksakt. Man kan definere parallele Linier enten som to rette Linier i samme Plan, der ikke skære hinanden, hvor langt de end forlænges, eller som to rette Linier i samme Plan, der danne lige store ensliggende Vinkler [2]) med en dem skærende tredje, eller som saadanne to Linier i samme Plan, at alle Punkter i den ene have lige store Afstande fra den anden [2]); men har man først valgt en af disse tre Definitioner, da kan man ikke efter nogen Tids Brug afskaffe den og indføre en af de andre uden derved at ophøre med at være eksakt. Men saaledes gaar det ikke med Definitionerne i Fysikken; thi naar Eleven begynder paa dette Fag, har han allerede gennem et Tidsrum af 12 Aar ad empirisk Vej indvundet og klaret sig visse enkelte af Fysikkens Grundbegreber som f. Eks. »Hvile«, »Bevægelse«, »Hastighed« [3]) og »Vægt«, han mangler kun Definitionerne, og i hvilken Form præsenteres nu disse ham i Fysikken?

Da jeg gik i Skole, sagde Fysikken:

---

[1]) Tidsskriftets Afdeling A for 1890, Side 44, Lin. 9 f. n. — Side 45, Lin. 3 f. o.

[2]) Disse Begreber naturligvis forud definerede.

[3]) af ham kaldt »Hurtighed«.

1. Et Legeme siges at bevæge sig, naar det forandrer sit Sted. Mangel paa Bevægelse kaldes Hvile.

Nutildags (over 30 Aar senere) siger Fysikken:

2. Et Legeme er i Hvile, naar det beholder sin Plads, i Bevægelse, naar det forandrer sin Plads.

Definitionen er altsaa i den forløbne Menneskealder ikke undergaaet anden Forandring end, at Ordet »Sted« er afløst af Ordet »Plads«. Mon dette nu er en Forbedring? Mon ikke et Legemes Sted er den bestemte Del af Rummet, som Legemet udfylder? Og mon ikke et Legemes Plads er den bestemte Del af Rummet, som Legemet kan, maa, bør eller skal udfylde og altsaa maaske udfylder? Sæt nu for Eleven paa Bordet et regelmæssigt Prisme eller en regelmæssig Pyramide, og drej saa Legemet om dets geometriske Akse, indtil Grundfladen dækker sig selv i en ny Stilling; da ere Elevens Begreb og Definitionen enige i, at Legemet har bevæget sig, fordi det har maattet forlade sin Plads for at komme i den nye Stilling. Men gør saa det samme Eksperiment med en Omdrejningsvalse eller en Omdrejningskegle, eller lad en Globus dreje sig om sin Akse, da har Legemet ifølge Elevens Begreb bevæget sig, fordi det stadigt har forandret sin Stilling, medens det ifølge Definitionen er forblevet i Hvile, fordi det stadigt har indtaget samme Sted eller Plads. Havde man derimod givet Eleven den Besked, at et Legeme siges at være i Hvile eller i Bevægelse, eftersom ethvert af dets Punkter beholder sin Plads eller ikke, da havde hans Begreb kunnet forliges med Definitionen; thi han ved jo godt, naar han begynder paa Fysikken, at et Legeme kan skifte Stilling uden at skifte Plads [1]). Med andre Ord, naar man i gængse Udtryk, hvis sædvanlige Betydninger dristigt kunne forudsættes at være Eleverne bekendte, præsenterer dem en Definition, som først ophører at være falsk, naar et af dens Ord tages i en anden Betydning end den, der saavel igennem

[1]) Det har han (i mindre matematisk Betydning) maaske ofte gjort i Timerne og faaet en Røffel derfor.

daglig Tale som igennem forskelligartet Læsning er slaaet fast i Elevernes Bevidsthed, gør man sig da ikke skyldig i en Adfærd overfor dem, som ret til Gavns er kvalificeret til at kaldes upædagogisk?

Ikke bedre er det gaaet Begrebet »Vægt«. I min Skoletid sagde Fysikken derom det samme, som den derom siger endnu (hvis den derom siger noget), nemlig:

3. Et Legemes Vægt er det Tryk, som det udøver paa sin Understøtning.

Men dette Tryk er jo netop ikke Legemets Vægt, undtagen naar Understøtningen bestaar enten i et af Legemets Punkter, hvori det hænger i Hvile[1]) eller i et vandret Plan, hvorpaa det hviler. F. Eks. naar en Kugles Understøtning bestaar i to i en vandret Linie forneden sammenstødende Skraaplaner eller i to af dens Punkter, hvori den hænger i Hvile, da er dens Vægt som bekendt ikke Summen af de Tryk, den udøver imod disse Understøtningselementer, men kun Summen af disse Tryks lodrette Komposanter, hvilket ganske sikkert under »Kræfters Sammensætning og Opløsning« paavises for Eleverne af Læreren, der desuagtet lader dem forblive troende paa Definitionens Ægthed i Stedet for at hæve dens Falskhed ved at lade dem dyppe deres Penne og tilføje »lodrette« foran »Tryk« samt »i Hvile« foran »udøver«.

Og hvad skal man saa sige om et sammensat Begreb som »Bevægelsesmængde«? Da jeg gik i Skole, sagde Fysikken:

4. Den i et bevæget Legeme til Stede værende bevægende Virksomhed kaldes Bevægelsens Mængde og bestemmes ved Produktet af Masse og Hastighed.

Nu siger Fysikken:

5. Produktet af et Legemes Masse og Hastighed kaldes dets Bevægelsesmængde.

---

[1]) Under Svingninger vil jo Centrifugalkraften forøge Trykket — især i Hvilestillingen —, hvor Hastigheden er størst.

Ganske vist gaar den sidste af disse to Definitioner uden Omsvøb løs paa Begrebet og er derfor mindre taaget end den første; men desuagtet giver ingen af dem Eleven stort mere end, hvad man i daglig Tale kalder »en Sludder for en Sladder«, fordi for ham Begreberne »Masse« og »Hastighed« forud ere henholdsvis taaget og falsk definerede.

Da jeg gik i Skole, sagde Fysikken:

6. Mængden af den i et Legeme indeholdte Materie kaldes Legemets Masse.

Det samme siger Fysikken ofte endnu. Er dette overfor en Elev paa 12 à 13 Aar en Definition eller en Mystifikation? Kan han forstaa, at en Blykugle indeholder en større Mængde Materie end en lige saa stor Tinkugle? Og kan Læreren forklare ham, hvad der menes med »Mængde af Materie«? Maaske Eleven til den Dag, da han i Fysiklektie har denne Definition, i samme Lektie har lidt om Grundstoffer og Atomer, og maaske har Læreren, da han gennemgik denne Lektie for ham, vakt hans Fantasi lidt i Retning af det endnu uopdagede Urstof; men endda ere de begge overfor Definitionens Mening lige kloge. Er det Meningen, at der er mere Bly i Blykuglen end Tin i Tinkuglen eller beror disse to Kuglers Forskel i Masse derpaa, at den første indeholder mere Urstof end den anden?

Da jeg gik i Skole, sagde Fysikken:

7. Et Legeme siges at bevæge sig jævnt, naar det i lige store Tider gennemløber lige store Rum, og Forholdet imellem Størrelsen af det gennemløbne Rum og den derpaa anvendte Tid kaldes da Legemets Hastighed.

Nu siger Fysikken:

8. Et Legeme siges at bevæge sig jævnt, naar det i lige store Tider gennemløber lige lange Veje, og den i et Sekund gennemløbne Vej kaldes da Legemets Hastighed.

Lad os nu prøve Paalideligheden af disse to i det væsentlige kun ved »Rum« og »Vej« fra hinanden forskellige Definitioner ved at anvende dem paa et Fænomen, der jo for

Eleverne anskueliggøres i Geografitimer, nemlig en Globus med Radius r, der drejer sig i Løbet af t Sekunder en Gang rundt om sin Akse saaledes, at hvilket som helst af dens Punkter i lige store Tider beskriver lige store Buer. Eleven vil da, især før Begrebet »jævn Bevægelse« er blevet ham af Fysikken defineret, være aldeles paa det klare med, at denne Globus har en jævn [1]) Bevægelse, og hvad er saa dens Hastighed? »Størrelsen af det gennemløbne Rum« er jo $\frac{4}{3}\pi r^3$, hvilket Eleven dog først lærer et Par Aar senere, og »Længden af den gennemløbne Vej« er jo 0, da Legemet ikke har tilbagelagt nogen Vej (i dette Ords sædvanlige Betydning), eftersom det er forblevet paa samme Sted eller Plads, ja ifølge Definitionerne 1 og 2 endog af den Grund slet ikke har bevæget sig. Altsaa, da jeg gik i Skole, var Hastigheden for en saadan Globus $\frac{4\pi r^3}{3t}$, og nu er den $\frac{0}{t} = 0$, naturligvis ikke for os Lærere eller for de videre komne (f. Eks. til en nær forestaaende matematisk-naturvidenskabelig Embedseksamen læsende) Elever, der jo ere lærde nok til at erkende begge Facitters Taabelighed og dermed begge Definitioners Uvederhæftighed, men for de paa det elementære Trin staaende Elever, der jo maa tro, at enten første eller sidste Facit er rigtigt, alt eftersom Nr. 7 eller Nr. 8 er bleven dem bibragt.

Og hvilket Begreb har saa Eleven faaet om Globens Bevægelsesmængde, naar M er den »Mængde Materie«, som den indeholder? Ganske ligefrem, i første Tilfælde, at den er $M \cdot \frac{4\pi r^3}{3t}$, og i sidste Tilfælde, at den er $M \cdot \frac{0}{t} = 0$.

Naar man vrager noget af andre godkendt, paatager man sig selvfølgelig derved en Forpligtelse til i det mindste at gøre et Forsøg paa at sætte noget bedre i Stedet. Et saadant Forsøg er følgende [2]).

---

[1]) af ham maaske kaldt »ensformig« eller »regelmæssig«.

[2]) Hvad deri ikke er omtalt, forudsættes behandlet paa sædvanlig Maade.

Hvile, Bevægelse, Hastighed og Akceleration.

Et Punkt siges at være i Hvile eller i Bevægelse, eftersom det forbliver paa sin Plads eller ikke. Gennemløber Punktet i lige store Tider lige lange Veje, da siges det at bevæge sig jævnt, og den i en Tidsenhed gennemløbne Vejlængde kaldes da Punktets Hastighed. Bevæger Punktet sig jævnt i en Cirkel, da kaldes den Vinkel, der i en Tidsenhed beskrives af en fra Centrum igennem Punktet trukken ret Linie Punktets Vinkelhastighed, der altsaa er uafhængig af Cirklens Radius.

Et Legeme siges at være i Hvile eller i Bevægelse, eftersom ethvert af dets Punkter er i Hvile eller ikke. Bevæge alle et Legemes Punkter sig jævnt med samme Hastighed og i samme Retning (f. Eks. naar et fast Legeme uden at vakle eller slingre slæbes henad et vandret Plan, idet man holder et af dens Punkter i jævn retlinjet Bevægelse), da kaldes Legemets Bevægelse jævn og alle dets Punkters fælles Hastighed Legemets Hastighed. Naar der i et Legeme er et Punkt, der bevæger sig jævnt (f. Eks. Centrum i en Kugle, der ruller paa et vandret Plan som Følge af et paa et af dens Punkter anbragt Stød), da siger man ogsaa ofte, at Legemet bevæger sig jævnt, og kalder et saadant Punkts Hastighed Legemets Hastighed, nemlig naar man ikke har Brug for at tage Hensyn til, hvorledes Legemets øvrige Punkter bevæge sig. Dreje et Legemes Punkter sig alle jævnt og med samme Vinkelhastighed om samme Akse, da siges Legemet at dreje sig om denne Akse og med denne Vinkelhastighed, selv om nogle af Legemets Punkter ligge i Aksen og altsaa ikke bevæge sig.

Paavirkes et Molekyle kun af en kun i et Nu virkende Kraft, d. e. et Stød, da faar Molekylet en jævn Bevægelse i Stødets Retning. Virker derimod i længere Tid en Kraft af uforanderlig Styrke og Retning paa et Molekyle, der, da Kraften begyndte at virke, var i Hvile, da faar Molekylet, saa længe Kraften virker, i Kraftens Retning en Bevægelse med jævnt

voksende Hastighed, d. e. en Hastighed, der staar i et uforandret Forhold til Tiden, regnet fra Bevægelsens Begyndelse, hvilket man indser ved at tænke sig Kraften virkende som utallige øjeblikkeligt paa hinanden følgende Stød med samme Styrke og Retning som Kraften; den Tilvækst, Hastigheden i saa Fald faar i hvert Sekund, kaldes Akcelerationen. Har Molekylet endelig, før Kraften begynder at virke, en Bevægelse i en ret Linie, der danner en Vinkel med Kraftens Retning, da faar Molekylet en krumliniet Bevægelse, og ved dets Hastighed til et hvilket som helst Tidspunkt forstaas da den Hastighed, hvormed det vilde bevæge sig i Tangenten, hvis Kraften til det Tidspunkt ophørte at virke, og Tangentens Retning kaldes Bevægelsens Retning.

Vægt, Masse og Bevægelsesmængde.

Ved et Legemes Vægt forstaas det Tryk, som det, naar det er i Hvile, udøver paa et vandret Plan, hvorpaa det ligger, eller paa et af sine Punkter, hvori det hænger. Ophængningspunktet kaldes Legemets Tyngdepunkt, naar Legemet forbliver i Hvile, hvilken Stilling man end giver det.

Ved at trække 2n gennemborede Skiver (f. Eks. Toører), af hvilke hver har Vægten p, paa en Traad, slaa Knude for dem i begge Ender og lægge Traaden over Tridsen paa Atvoods Faldmaskine kan man ved at maale de Vejlængder, som den samlede Vægt 2np gennemløber i en og samme Tid, eftersom Overvægten er 2p, 4p, 6p o. s. v., paavise, at disse Vejlængder og (ifølge Formlen $v = \frac{1}{2} G t^2$) altsaa ogsaa Akcelerationerne forholde sig som Overvægtene, eller med andre Ord at Forholdet imellem en i et Legemes Tyngdepunkt virkende Kraft og den det derved bibragte Akceleration forbliver for et og samme Legeme uforandret, og dette Forhold kaldes Legemets Masse.

Produktet af et Molekyles Masse og dets Hastighed kaldes dets Bevægelsesmængde. Produktet af Molekylet og dets Hastigheds Komposant i en given Retning

kaldes dets Bevægelsesmængde i den givne Retning. Summen af et Legemes Molekylers Bevægelsesmængder kaldes Legemets Bevægelsesmængde, og Summen af Molekylernes Bevægelsesmængder i en given Retning kaldes Legemets Bevægelsesmængde i den givne Retning. Have et Legemes Molekyler i et givet Øjeblik alle samme Bevægelsesretning og samme Hastighed, da er i et saadant Øjeblik altsaa Legemets Bevægelsesmængde Produktet af dets Masse og dets Hastighed. Da et Legemes Tyngdepunkt kan betragtes som et Molekyle med hele Legemets Masse, kalder man ofte Produktet af denne og Tyngdepunktets Hastighed Legemets Bevægelsesmængde, nemlig naar man ikke har eller tror at have Brug for at tage Hensyn til Legemets øvrige Punkters Bevægelser.

Det bliver dog nok paa et lignende Grundlag som det ovenfor angivne, at vi maa tage fat paa en roterende Globus, om hvis Bevægelsesmængde vi jo godt kunne risikere, at en eller anden mere tænksom af vore Elever afæsker os en nøjere Forklaring et Par Aar efter, at vi affærdigede ham med den summariske Besked »Masse Gange Hastighed« og, hvis han viste sig uimodtagelig for den, ikke gav ham andet end en daarlig Karakter som Argument for dens Rigtighed. Der kræves ingen højere Matematik til over for ham at klare Sagen; mon det da er af »praktiske« eller »pædagogiske« Hensyn, at man vedbliver at give Eleverne den sædvanlige i mangfoldige Tilfælde baade uforstaaelige og misvisende Besked, at et Legemes Bevægelsesmængde er dets Masse Gange dets Hastighed?

En Permutatjonsopgave.

(Af C. Dahl.)

Givet p Størrelser, alle lig a, og q Størrelser $a_1 a_2 a_3 \ldots a_q$ alle forskjellige. Man skal finde Antallet af Rækker, der indeholde alle de p Størrelser a samt r Størrelser $a_1 a_2 a_3 \ldots a_q$, idet disse Størrelser maa benyttes hver indtil r Gange, og idet der skal tages Hensyn til den Orden, hvori Elementerne opstilles.

Kaldes Antallet af Rækker A_r og bestemmes det samlede Antal Elementer $a_1 a_2 \ldots a_q$ i alle Rækker, bliver dette, da der i hver Række forekommer r af disse Elementer lig med $r A_r$; men da et bestemt Element f. Ex. a, vil indtage den første Plads i A_{r-1} Rækker, den anden Plads i ligesaa mange Rækker o. s. v., og da der er q Elementer $a_1 a_2 a_3 \ldots a_q$ og $p + r$ Pladser i hver Række, bliver det samlede Antal Elementer $a_1 a_2 \ldots a_q$ i alle Rækkerne ogsaa lig med $q(p+r) A_{r-1}$, altsaa $r A_r = q(p+r) A_{r-1}$. Da endvidere $A_1 = q(p+1)$, eftersom hver Række i dette Tilfælde bestaar af de p Elementer a og et af Elementerne $a_1 a_2 \ldots a_q$, der paa $(p+1)$ Maader kan indskydes mellem de p Elementer a, har man:

$$\begin{aligned} r A_r &= q(p+r) A_{r-1} \\ (r-1) A_{r-1} &= q(p+r-1) A_{r-2} \\ &\vdots \\ 2 A_2 &= q(p+2) A, \\ 1 A_1 &= q(p+1), \end{aligned}$$

hvoraf ved Multiplikatjon

$$[r] A_r = q_r . (p+r)(p+r-1) \ldots (p+1) = q_r . \frac{[p+r]}{[q]}$$

$$A_r = \frac{[q+r]}{[p]} q_r = K_{p+r,\, p} . q^r.$$

Danske Eksamensopgaver.

Almindelig Forberedelseseksamen.

(Marts 1893.)

Aritmetik.

1. Find x af Ligningen

$$\frac{x^2 - 165x + 3500}{x(8 - x)} = 225.$$

2. Reducer $\left(1 + \frac{\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{3}}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}\right) : \left(1 - \frac{\sqrt{\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{1}{3}}}{\sqrt{2} - \sqrt{3}}\right).$

3. Forkort Brøken

$$\frac{a^4 - b^4}{a^5 + a^4b - 2a^3b^2 - 2a^2b^3 + ab^4 + b^5},$$

og angiv dernæst den forkortede Brøks Værdi, naar $a + b = 0$ eller $a - b = 0$.

Opløsning. 1. Ligningen ordnes til

$$x^2 - \frac{1965}{226}x + \frac{3500}{226} = 0,$$

der giver
$$x = \frac{1965 \pm \sqrt{697225}}{452}$$

$$= \frac{1965 \pm 835}{452} = \begin{cases} 6\frac{22}{113} \\ 2\frac{1}{2}. \end{cases}$$

2. Udtrykket ændres først til

$$[1 + (\sqrt{\tfrac{1}{2}} + \sqrt{\tfrac{1}{3}})(\sqrt{3} - \sqrt{2})] : [1 + (\sqrt{\tfrac{1}{2}} - \sqrt{\tfrac{1}{3}})(\sqrt{3} + \sqrt{2})],$$

der udregnes til

$$(1 + \sqrt{\tfrac{3}{2}} - \sqrt{\tfrac{2}{3}}) : (1 + \sqrt{\tfrac{3}{2}} - \sqrt{\tfrac{2}{3}}) = 1.$$

3.
$$\frac{a^4 - b^4}{a^5 + a^4b - 2a^3b^2 - 2a^2b^3 + ab^4 + b^5}$$

$$= \frac{(a^2 - b^2)(a^2 + b^2)}{(a^4 - 2a^2b^2 + b^4)(a + b)}$$

$$= \frac{a^2 + b^2}{(a^2 - b^2)(a + b)}.$$

Naar $a - b = 0$ eller $a + b = 0$ bliver Størrelsen $= \infty$.

Geometri.

1. a) Hvilke Sætninger gælde om Diagonalerne i en Rhombe, og hvorledes bevises de?

b) I en Rhombe ere Diagonalerne henholdsvis a og $a\sqrt{3}$; man skal finde Forholdet mellem Siden og hver af Diagonalerne, Rhombens Vinkler, samt Forholdet mellem Rhombens Areal og den indskrevne Cirkels Areal.

2. Konstruer en Trekant ABC, hvor $\angle$ A skal være 120^0, og hvor Siden AC samt Medianen til denne Side skulle have givne Længder. Hvilken Mulighedsbetingelse er der?

Opløsning. 1. b) Siden findes $=$ a. Forholdene altsaa henholdsvis 1 og $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Vinklerne 60^0 og 120^0.

Rhombens Areal $= \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Cirklens » $= \pi r^2 = \frac{3\pi a^2}{16}$.

Forholdet altsaa $= \frac{8\sqrt{3}}{3\pi}$.

2. Paa det ene Ben af $\angle$ A ($= 2 \cdot 60^0$) afsættes AC, denne halveres og med Midtpunktet M som Centrum tegnes med Medianen til Radius en Cirkel, der skærer Vinkel A's andet Ben i B. Der bliver 1 Løsning, naar MB $> \frac{1}{2}$ AC, ellers ingen.

Praktisk Regning.

1. Et Stykke Jord af Form som et Rektangel med Siderne $212\frac{1}{2}$ Alen og $90\frac{4}{15}$ Alen udstykkes til Byggegrunde. 15 % af Arealet sælges for 4 Kr. 75 Øre Kvadratalen, $\frac{11}{24}$ af Arealet for 4 Kr. 50 Øre Kvadratalen, Resten for 3 Kr. 10 Øre Kvadratalen. Til hvilken Gennemsnitspris er en Kvadratalen solgt, og hvor meget indkommer der ved Salget?

2. En Kapital paa 7325 Kr. 84 Øre indsættes til Forrentning med Rente og Rentes Rente i 8 Aar i en Sparekasse; de første 4 Aar er Renten $3\frac{3}{8}$ % p. a., men de følgende Aar

$\frac{1}{10}$ % mindre. Hvor meget vokser Kapitalen til, og hvor mange Procent af den oprindelige Kapital udgør de opsamlede Renter?

Opløsning. 1. Gennemsnitsprisen er

$$\frac{15}{100} \cdot 475 + \frac{11}{24} \cdot 450 + \frac{47}{120} \cdot 310$$
$$= 398\tfrac{11}{12} \text{ Øre.}$$

Jorden udbringes da til

$$\frac{4787}{12} \cdot \frac{425}{2} \cdot \frac{1354}{15} \text{ Øre}$$
$$= 76518 \text{ Kr. } 86\tfrac{19}{36} \text{ Øre.}$$

2. Kr. $7325{,}84 \cdot 1{,}036^4 \cdot 1{,}035^4 = 9684{,}20$ Kr.

De opsamlede Renter 2358,36 Kr. udgøre $\frac{23583600}{732584}$ $= 32{,}2$ % af den oprindelige Kapital.

Løste Opgaver.

151. Konstruer en Trekant ABC, naar man kender Punktet A og Siden BC's Røringspunkter med de to af Trekantens Røringscirkler, der ligge i $\angle$ A (eller med de to andre).

Opløsning. Om de båda tangeringspunkterna äro T och T', så bestämmes rigtningen af sidan BC genom att sammanbinda dessa båda punkter.

Lätt inses, att punkten A är en af de båda nämnda cirklarnes likformighetspunkter. Dragas för den skull räta linier genom tangeringspunkterna T och T' $\perp$ BC samt en rät linie genom punkterna A och T, hvilken senare skär den genom T' dragna normalen i punkten P samt uppritas en cirkel, som går genom punkterna P og T' samt har sin medelpunkt belägen på linien PT', så är tydligen denna cirkel en af de i problemet antydda. Drages vidare en rät linie genom

punkten A samt den erhållna cirkelns medelpunkt, så utgör skärningspunkten mellan denna linie och den i punkten T dragna normalen, medelpunkten för den andra cirkeln. Drages nu från punkten A tangenter till en af cirklarne, så inses lätt, att den af dessa linier och linien TT' bildade triangeln är den sökta.

(Theodor Ney.)

(Ogsaa løst af S. Bentzen og H. C. Olsen.)

154. Søg Summen af Rækken

$$u_1 + u_2 + \ldots u_{2n-1},$$

hvor $u_p = x^p + x^{p-1} y + \ldots + xy^{p-1} (p \leqq n)$

$$u_{n+p} = x^n y^p + \ldots + x^{p+1} y^{n-1}.$$

Opløsning. Skrives de forskjellige Led $u_1, u_2 \ldots u_{2n-1}$ op under hinanden, saa at samme Potens af y kommer i samme lodrette Række, ser man at

$$S = (x + x^2 + x^3 + \ldots x^n)(1 + y + y^2 + y^{n-1})$$

$$= x . \frac{x^n - 1}{x - 1} . \frac{y^n - 1}{y - 1} .$$

(H. S. Nielsen.)

(Ogsaa løst af H. C. Olsen og P. Hassing.)

155. Søg Summen af Rækken

$$2x + 6x^2 + 12x^3 + \ldots + p(p+1)x^p + \ldots + n(n+1)x^n$$
$$+ n(n+1)x^{n+1} + (n-1)(n+2)x^{n+2} +$$
$$\ldots + (n-p+1)(n+p)x^{n+p} + \ldots + 2nx^{2n}.$$

Opløsning. Man multiplicerer Rækken med x og subtraherer det udkomne fra den givne Række, dividerer med 2 og faar, idet den søgte Sum er s:

$$\frac{s}{2}(1-x) = x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots + px^p + \ldots + nx^n$$
$$- [x^{n+2} + 2x^{n+3} + \ldots + (p-1)x^{n+p} + \ldots (n-1)x^{2n} + nx^{2n+1}],$$

multipliceres endnu en Gang med x og subtraheres faas:

$$\frac{s}{2}(1-x)^2 = x + x^2 + \ldots + x^p + \ldots + x^n - nx^{n+1}$$
$$- [x^{n+2} + x^{n+3} + \ldots + x^{n+p} + \ldots + x^{2n} + x^{2n+1} - nx^{2n+2}],$$

heraf dannes atter paa samme Maade:

$$\frac{s}{2}(1 - x)^3 = x - x^{n+1} - nx^{n+1} + nx^{n+2} - x^{n+2} + nx^{2n+2}$$
$$+ x^{2n+2} - nx^{2n+3} = x(x^{n+1} - 1)\,[n(1 - x)x^n + x^n - 1],$$

og altsaa

$$s = \frac{2x(x^{n+1} - 1)\,[n(1 - x)x^n + x^n - 1]}{(1 - x)^3}$$

(H. C. Olsen.)

156. Find Summen af Sider og Diagonaler i en regulær n-kant, udtrykt ved største Radius.

Opløsning. Fra en af Polygonens Vinkelspidser udgaar der ialt $n - 1$ Linjer. Betegnes disse med $k_1, k_2 \ldots k_{n-1}$, faaes ved Anvendelse af den ptolemæiske Læresætning:

$$k_2 \,.\, k_2 = k_1(k_1 + k_3)$$
$$k_2 \,.\, k_3 = k_1(k_2 + k_4)$$
$$k_2 \,.\, k_4 = k_1(k_3 + k_5)$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$k_2 \,.\, k_{n-2} = k_1(k_{n-3} + k_{n-1}).$$

Kaldes Summen af alle de fra en Vinkelspids udgaaende Linier S, og indsættes k_1 og k_2 i Stedet for henholdsvis k_{n-1} og k_{n-2}, giver en Addition af ovenstaaende Ligninger:

$$k_2(S - 2k_1) = k_1(2S - 2k_1 - 2k_2)$$

eller
$$S = \frac{2k_1^2}{2k_1 - k_2} = \frac{8r^2 \sin^2 \frac{\pi}{n}}{4r \sin \frac{\pi}{n} - 4r \sin \frac{\pi}{n} \,.\, \cos \frac{\pi}{n}}$$

$$= \frac{2r \sin \frac{\pi}{n}}{1 - \cos \frac{\pi}{n}} = 2r \cot \frac{\pi}{2n}.$$

Deraf findes den søgte Sum at være:

$$nr \,.\, \cot \frac{\pi}{2n}.$$

Ovenstaaende Løsning, indsendt af Hr. Kand. P. Hassing, angiver, som det vil ses, en smuk Methode til Summation af den trigonometriske Række $\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \ldots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n}$.

I de andre indsendte Løsninger af Opgaven er denne Summation fore- e, der i Almindelighed anføres i Lærebøger i Trigonometri.

Opgaver til Løsning.

---

159. **Indskriv i en given Cirkel en Firkant, naar der er givet en Side, dens Vinkel med den modstaaende samt Summen af de andre to Sider.**

(P. A. Larsen.)

160. **En tagformet Prismatoide dannes saaledes: Den ene Endeflade er en Rhombe med Siden a og en Vinkel paa 60°. Den rette Linje, hvortil den anden Endeflade er svundet ind, ligger lodret over den af Rhombens Diagonaler, der er a, og er lig med a. Bevis, at Midtersnittet i Prismatoiden er uafhængigt af Højden.**

Hvorledes afhænger Voluminet af Højden?

161. Idet n er positiv hel, og $0 < nx < \frac{\pi}{2}$, skal man bevise:

1) $\sin nx < n \sin x$

2) $\operatorname{tg} nx > n \operatorname{tg} x$.

162. Bevis, at følgende Relation er gældende i enhver Trekant: $T = \sqrt{\tfrac{1}{2} R \,.\, h_a \,.\, h_b \,.\, h_c}$.

163. I en Trekant er givet r, R, s. Dan den Ligning, hvis Rødder ere Trekantens Sider.

164. Bevis, at enhver skraa Plan skærer et ret Hjørnes Sideflader i en spidsvinklet Trekant.

(160—64 af Niels Nielsen.)

165. Find to hele positive Tal, om hvilke det gælder, at deres Sum er et Multiplum af deres Produkt.

166. Find tre hele positive Tal, om hvilke det gælder, at deres Produkt er lig Summen af Produkterne af Tallene »to og to«.

(165—66 efter Mathesis.)

Norske Examensopgaver.

(Meddelte af Lærer Magnus Berg.)

Middelskoleexamen 1892.

For gutter:

1. A kjøber 5 fade vin for kr. 4250,00. På grund af kontant betaling får han imidlertid 10 pct. afslag. Hvert fads bruttovegt er 918 kg. Hvert tomt fads vegt er $\frac{1}{12}$ af bruttovegten. 1000 liter veier 990 kg. Hvad har A givet for hver hektoliter af vinen?

A sælger hele vinpartiet til B. Betalingen skal erlægges først 3 måneder efter salget og beregnes efter kr. 110,00 pr. hl. For beløbet udsteder B en vexel. A sælger strax vexlen i en bank, der udbetaler ham beløbet kontant med fradrag af diskontopræmien, der beregnes efter $5\frac{1}{2}$ pct. p. a. Hvormeget fik A udbetalt af banken? Hvor stor var A's fortjeneste ved denne handel?

Svar: 1) kr. 9,00. 2) kr. 4610,72. 3) kr. 785,72.

2. Fladeindholdet af et ligesidet triangel er 4,5 m. Find fladeindholdet af en cirkel, der kan omskrives om dette triangel, og af det kvadrat, der kan indskrives i samme cirkel. $\pi = 3,14$.

Opløsning. 1) 10,877 m². 2) 6,928 m².

3. En Mand har $\frac{1}{4}$ af sin formue stående i en forretning, der giver et udbytte af 5 pct. p. a., $\frac{1}{3}$ i en bank til $3\frac{3}{4}$ pct. p. a. og resten i en anden bank til $3\frac{1}{2}$ pct. p. a. Han beregner, at om han satte hele sin formue ud til 4 pct. p. a., vil han få kr. 12,00 mere i årligt udbytte af sine penge. Hvor stor var mandens formue?

Svar. 28,800 kr.

4. Der er givet en cirkel med 3 cm. radius og en tangent til samme. Konstruer de rette linjer, af hvilke cirkelen

afskjærer en korde på 3,5 cm., og som danner en vinkel på 75 ⁰ med tangenten. Fremgangsmåden forklares.

Opløsning. En korde af den givne længde afsættes i den givne cirkel. Fra centrum nedfældes på korden en perpendikulær. Med denne som radius slaaes en med den givne koncentrisk cirkel, hvilken de søgte linjer skal tangere. To linjer, der danner hver en vinkel på 75 ⁰ med den givne tangent trækkes. Ned på disse fældes fra centrum perpendikulærer, hvor disse skjærer hjælpecirkelen, haves berøringspunkterne for de søgte linjer, der nu let kan trækkes.

For piger.

1. Som for gutter.

2. To cirklers periferier udgjør tilsammen 20,35 m.; den ene periferi er 4,25 m. længere end den anden. Beregn cirklernes radier og fladeindhold. $\pi = 3,14$.

Opløsning. [1]) 1,28ᵐ og 1,96ᵐ. [2]) 5,16 m² og 12,05 m².

3. Som for gutter.

4. I et trapets er den ene af de parallele Sider 4 cm. Med denne side danner den ene af de ikke parallele sider, der er 4 cm. lang, en vinkel på 90 ⁰, den anden af de ikke parallele sider en vinkel på 135 ⁰. Konstruer dette trapets og forklar fremgangsmåden. Hvor store er de andre vinkler og trapetsets fladeindhold?

Opløsning. Man konstruerer en ret vinkel; afsætter på det ene ben et stykke lig 4 cm. fra endepunktet af det afsatte stykke, trækkes en linje, som danner en vinkel på 135 ⁰ med samme ben og i en afstand af 4 cm. drages en parallel med dette. Denne vil da skjære det andet ben og den optrukne linje og sammen med de andre linjer begrænse det

søgte trapets, hvis to øvrige vinkler let findes at være 90° og 45°. Den længste af de parallele sider findes = 8.

$$Tr = \frac{(4+8)4}{2} = 24 \text{ cm.}$$

Svenske Eksamensopgaver.

Maturitetsexamen.

(Vårterminen 1893.)

Geometriska uppgifter.

1. En parallelogram, hvars sidor äro utdragna efter behag, är gifven. Att från en gifven punkt draga en rät linie så, att de stycken deraf, som ligga mellan hvarje par af de parallela sidorna i parallelogramen, blifva lika stora.

Opløsning. En Linie gennem en af Parallelogrammets Vinkelspidser, parallel med den søgte Linie, maa ifølge den opgivne Betingelse falde sammen med Diagonalen. Opgaven løses altsaa ved at man gennem det givne Punkt trækker Linier parallele med Diagonalerne.

2. Det stycke af en hyperbel-tangent, som ligger mellan assymptoterna delas midt itu af kontaktspunkten.

Opløsning. Abscisserne til Skæringspunkterne mellem

Tangenten $\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1$

og Asymptoterne $y = \pm \frac{b}{a} x$

ere $x_2 = \frac{a^2 b}{bx_1 - ay_1}$ og $x_3 = \frac{a^2 b}{bx_1 + ay_1}$.

Ved at benytte Relationen $b^2 x_1^2 - a^2 y_1^2 = a^2 b^2$ findes

$$x_2 + x_3 = 2x, \text{ hv. sk. bev.}$$

3. Att genom en gifven punkt inom en cirkel draga en korda, som i punkten delas i ett uppgifvet förhållande.

Opløsning. Man multiplicerer Cirklen med det givne Forhold $(-\frac{m}{n})$ m. H. t. det givne Punkt; den nye Cirkel skærer den givne i Endepunktet for den søgte Korde.

4. I skärningspunkterna mellan cirkeln $x^2 + y^2 = 16$ och ellipsen $\left(\frac{x}{5}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1$ dragas tangenter till hvardera kurvan. Bestäm vinklarna mellan dem vid tangeringspunkten.

Opløsning.

$$tg\,v = \frac{\frac{x_1}{y_1} - \frac{9x_1}{25y_1}}{1 + \frac{9x_1^2}{25y_1^2}} = \frac{16x_1y_1}{25y_1^2 + 9x_1^2},$$

hvor x_1 og y_1 findes af Ligningerne

$$x_1^2 + y_1^2 = 16 \text{ og } 9x_1^2 + 25y_1^2 = 225,$$

der give $\quad y_1 = \pm\frac{9}{4}, \quad x_1 = \pm\frac{5\sqrt{7}}{4},$

hvorved $\quad tg\,v = \pm\frac{\sqrt{7}}{5},$

$$v = \pm 27^0\,53{,}1'.$$

5. Från en punkt O äro till en cirkel dragna två tangenter, som beröra densamma i A och B. C är midtpunkten af OA, D af OB. Tages på linien CD en godtycklig punkt F, så är alltid OF lika lång som den från F till cirkeln dragna tangenten.

Opløsning. Tænkes et Koordinatsystem med Origo i Centrum C, Ordinataksen gennem O, og er O's Ordinat = a, Cirklens Radius = r, vil O's Polar have Ordinaten $\frac{r^2}{a}$, og altsaa F have Ordinaten $\frac{r^2 + a^2}{2a}$, Abscissen ξ. Da er

$$OF^2 = \xi^2 + \frac{(r^2 - a^2)^2}{4a^2}.$$

Kvadratet paa Tangenten $FT^2 = \xi^2 + \frac{(r^2 + a^2)^2}{4a^2} - r^2$,

følgelig $\quad OF = FT.$

6. A, B och C äro tre fasta punkter på en rät linie, kring A vrider sig en annan dylik. Hvilken är orten för den punkt på denna sistnämda, från hvilken stycket BC synes under största möjliga vinkel?

Opløsning. Tegn en Cirkel gennem B og C, rørende Linien gennem A i R. Det søgte Sted er den Cirkel, R beskriver.

7. På en rät linie äro tagna två lika stora stycken utanför hvarandra. Att konstruera 2 cirklar, hvilka hafva hvar sitt stycka till korda, tangera hvarandra och hafva sina radier i gifven proportion.

Opløsning. De lige store Stykker være AB og CD med Midtpunkterne M og N; Midtpunktet af BC være P, de søgte Cirklers Røringspunkt O, deres Centrer α og β. Fællestangenten i O vil da gaa gennem P og Længden bestemt ved

$$PO = \sqrt{PB \,.\, PA} \quad \text{eller} \quad = \sqrt{PC \,.\, PD}.$$

Den vinkelrette fra O paa den givne Linje vil træffe denne i det Punkt Q, der deler MN i det givne Forhold mellem Radierne. Man faar altsaa to geometriske Steder for O, en Cirkel om P og en Perpendikulær paa den givne Linje i Q; derefter bestemmes Centrerne let.

Algebraiska uppgifter.

1. Logaritmen för ett tal i det system, hvars bas är 7, är 8 gånger större än logaritmen för 7 i det system, hvars bas är det första talet. Beräkna detta och logaritmerna!

Opløsning. $\log_7 x = 8 \,.\, \log_x 7$

$$\left(\frac{\log x}{\log 7}\right)^2 = 8, \quad \log x = \pm\sqrt{8} \,.\, \log 7 = \pm 2{,}39030$$

$$x = \begin{cases} 245{,}64 \\ 0{,}004071. \end{cases}$$

$$\log_7 245{,}64 = \sqrt{8} = 2{,}82842$$

$$\log_{245,64} 7 = \frac{\sqrt{8}}{8} = 0{,}35355.$$

De to andre Logaritmer ere $-\sqrt{8}$ og $-\frac{\sqrt{8}}{8}$.

2. Ett lån skall amorteras på det sätt, att vid slutet af hvart och ett af de tio första åren inbetalas 5 proc. af det ursprungliga lånebeloppet, men derefter vid hvarje års slut ett så stort belopp, att lånet blir amorteradt efter ytterligare tio år. Huru stort är detta belopp, då räntefoten är 4 proc.?

Opløsning. x proc., hvor x bestemmes af Ligningen

$$1{,}04^{10} - \frac{5}{4}(1{,}04^{10} - 1) = \frac{x}{4}\left(1 - \frac{1}{1{,}04^{10}}\right),$$

der giver $x = 10{,}85.$

3. En rät kon har en volym = v och en yta = a; bestäm dess höjd och bottenradie!

Opløsning.
$$\pi r^2 h = 3v \qquad (1)$$
$$\pi r^2 + \pi r\sqrt{h^2 + r^2} = a. \qquad (2)$$

Af (1) $r^2 = \frac{3v}{\pi h}$, der indsat i (2), bragt paa rational Form, efter lidt Reduktion giver den kvadratiske Ligning

$$h^2 - \frac{a^2}{3\pi v}h + \frac{2a}{\pi} = 0.$$

til Bestemmelse af h o. s. v.

4. I ett kärl kan vatten inledas genom två rör, men genom det ena kan det ock utledas derur. Om vattnet inledes genom det ena och samtidigt utledes genom det andra, åtgår till kärlets fyllande tre gånger så lång tid, som om blott det förra hålles öppet, eller (hvilket är detsamma) 4 timmar längre tid, än om vattnet inledes blott genom det andra. På huru lång tid fylles kärlet dels genom hvartdera röret ensamt, dels genom båda tillsammans, dels på det förstnämda sättet?

Opløsning. Hvis det første Rør fylder x

Timer, det andet i y Timer, ville begge Rør tilsammen fylde det i

$$\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} = \frac{xy}{y+x} \text{ Timer;}$$

men ledes Vand ind gennem det første Rør, ud gennem det andet, vil der til Fyldningen medgaa

$$\frac{1}{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}} = \frac{xy}{y-x} \text{ Timer.}$$

Til Bestemmelse af x og y haves ifølge Opgaven

$$\frac{xy}{y-x} = 3x = y+4,$$

hvoraf
$$x = \frac{8}{3}$$

(og $x = 0$, ubr., forudsætter at Karret stadigt er fuldt, naar blot det første Rør er aabent, uafhængigt af det andet) samt
$$y = 4.$$

De to andre Timetal blive $\frac{8}{5}$ og 8.

5. Uttryck alla fyra bikvadratrötterna ur -3 under formen $a+bi$, der a och b äro reella, samt i den imaginära enheten!

Opløsning.

$$(-3)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{3}\left(\cos\frac{2p\pi+\pi}{4} + i\sin\frac{2p\pi+\pi}{4}\right),$$

$$p = 0, 1, 2, 3,$$

altsaa
$$(-3)^{\frac{1}{4}} = \pm\frac{\sqrt[4]{12}}{2}(1 \pm i).$$

6. Hvilka spetsiga vinklar satisfiera ekvationerna

$$\frac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg} x} - \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 2x} = 2?$$

Opløsning. Ligningen reduceres til

$$\operatorname{tg}^4 x - 6\operatorname{tg}^2 x + 1 = 0,$$

der m. H. t. Forlangendet om spidse Vinkler giver

$$\operatorname{tg} x = \sqrt{2} \pm 1$$

$$x = \begin{cases} 67^0\,30' \\ 22^0\,30'. \end{cases}$$

7. Från den räta vinkelns spets i en rätvinklig triangel utgå två kroppar, en utefter hvardera kateten, och kringlöpa med konstanta hastigheter, hvilka förhålla sig till hvarandra som 69 till 71, triangeln i motsatt led längs sidorna. De mötas första gången midt på hypotenusen, andra gången 8 meter från utgångspunkten. Huru långa äro triangelns sidor?

Opløsning. Kateterne x Meter og y Meter ($x < y$). Bestemmelsesligningerne

$$\frac{x + \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2}}{69} = \frac{y + \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2}}{71} \qquad (1)$$

$$\frac{\frac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2} + y - 8}{69} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2} + x + 8}{71} \qquad (2)$$

reduceres til

$$71x - 69y + \sqrt{x^2 + y^2} = 0 \qquad (1a)$$

$$69x - 71y - \sqrt{x^2 + y^2} = -8 . 140 \qquad (2a)$$

hvoraf $y - x = 8,\quad y = x + 8,$

der indsat i (1a) giver

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 8 . 69 - 2x \text{ (altsaa } x < 4 . 69),$$

hvoraf atter ved Kvadrering m. m.

$$x^2 - 8 . 139x + 32(69^2 - 1) = 0.$$

$$x = 160.$$

$$y = 168.$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 232.$$

Uppgifter af mekaniskt och fysikaliskt innehåll.

1. Uppför en rak ström, hvars bredd är 15 m., skall en båt dragas med jämn hastighet af två personer, som gå utmed strömmen på hvar sin strand. Den ena draglinans längd är 9 m., den andras 12 m. Man önskar, att den längre linans spänning skall vara $\frac{4}{5}$ af den kortares. Beräkna häraf båtens afstånd från stränderna under dragningen!

Opløsning. Af Ligningerne

$$x + y = 15,$$

$$x = 12 \sin \alpha, \quad y = 9 \sin \beta,$$

$$\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{2}{3},$$

findes de søgte Afstande

$$x = 10 \text{ m.}, \quad y = 5 \text{ m.}$$

2. Med huru stor hastighet skall en 16° varm bösskula af bly slå an mot en skotttafla, för att det i kulan genom stöten uppkommande värmet skall vara tillräckligt att smälta kulan? Man kan antaga, att kulan genom stöten förlorar hela sin hastighet samt att af den motsvarande rörelseenergien 45 procent i form af värme kommer kulan till del. Blyets egentliga värme är 0,031, dess smältvärme 5,4 och dess smältpunkt 326°; mot 1 värmeenhet svarar ett arbete af 425 kgm. Accelerationen vid fritt fall är 9,8 m.

Opløsning. Af Formlen

$$\frac{45}{100} \cdot \frac{1}{2} \frac{P}{g} v^2 = 425 \text{ P } [0{,}031 (326 - 16) + 5{,}4],$$

hvor v betyder Hastighedens Metertal, findes

$$v = 527.$$

3. På att vågrätt bord stå två kubiska kärl, af hvilka det ena rymmer 7 gånger så mycket som det andra. Det mindre kärlet fylles fullständigt med en viss vätska och lika mycket af samma vätska slås i det större kärlet. Huru stort är förhållandet mellan de tryck, som af vätskan utöfvas på en sidovägg i hvartdera kärlet?

Opløsning. Kaldes Kanten i det mindre Kar x, i det større y og Vædskens Højde i dette h, Trykkene T_x og T_y, haves

$$y^3 = 7x^3, \quad y^2 h = x^3,$$

$$\frac{T_x}{T_y} = \frac{x^2 \cdot \frac{1}{2} x}{y h \cdot \frac{1}{2} h} = 7.$$

4. Vid hafsytan har man vid ett barometerstånd af 75 cm. inneslutit 3,5 liter torr luft af den yttre luftens tryck i en blåsa, hvars vägg är ytterst lättböjlig. Till hvilket djup skall blåsan, med temperaturen antagen oförändrad, nedföras i hafvet, för att den instängda luftens rymd skall blifva 200 kbcm.? Hafsvattnets egentliga vigt är 1,02, kvicksilfrets 13,6.

Opløsning. Dybden x m. bestemmes af Ligningen

$$35 \cdot 0{,}75 \cdot 13{,}6 = 2 \cdot 1{,}02 \cdot x + 2 \cdot 0{,}75 \cdot 13{,}6,$$

hvoraf

$$x = 165.$$

5. Vid en temperatur af 24° har man medelst en messingsskala, hvars gradering är riktig vid 0°, uppmätt en barometerhöjd och funnit den vara 763,5 mm. Beräkna det barometerstånd som man vid samma tilfälle skulle funnit, om kvicksilfrets och skalans temperatur varit 0°. Kvicksilfrets rymdutvidgningskoefficient är 0,000179, messingens längdutvidgningskoefficient 0,000019.

Opløsning.

$$h^{mm.} = 763{,}5^{mm.} (1 - 24 \cdot 0{,}000179)(1 + 24 \cdot 0{,}000019)$$

giver

$$h = 760{,}6.$$

6. Ett glasprisma, hvars tvärgenomskärning är en liksidig triangel, har erhållit en sådan ställning, at en af dess sidoytor hel och hållen är i beröring med en vattenyta. Mot en af de båda andra sidoytorna infaller en ljusstråle vinkelrätt. I hvilken riktning lempar strålen prismat? Brytningsexponenten från luft till glas är $\frac{3}{2}$, från luft till vatten $\frac{4}{3}$.

Opløsning. Straalen forlader Prismet og gaar ind i Vandet, med hvis Overflade Prismets Sideflade er i Berøring, under en Vinkel b med Indfaldsloddet, bestemt ved

$$\frac{\sin 60^0}{\sin b} = \frac{4}{3} : \frac{3}{2} = \frac{8}{9},$$

$$b = c.\ 77^0.$$

7. Polerna af en galvanisk stapel, hvars elektromotoriska kraft är 7,6 volt, förenas med en ledning, i hvilken en tange

bussol finnes indsatt, och bussolens nål gör dervid ett utslag af 43 ^{0},5. Beräkna, huru stor längd man bör indføra i strömbanan af en viss tråd, hvars diameter är 0,4 mm och egentliga ledningsmotstånd 0,15, för att erhålla en strömstyrka af 0,5 ampère, då man vet, att om strömstyrkan i den ursprungliga ledningen vore 1 ampère, skulle bussolen angifva ett utslag af 32 ^{0},5.

Opløsning. $$\frac{7{,}6}{m} = \frac{\operatorname{tg} 43^0{,}5}{\operatorname{tg} 32^0{,}5}.$$

$$\frac{7{,}6}{m + \frac{l \,.\, 0{,}15}{\pi \,.\, 0{,}04}} = 0{,}5.$$

Elimination af Modstanden m giver for l (den indskudte Traads Metertal) et Udtryk, der udregnes til 8,46.

Danske Examensopgaver.

Søofficersskolens Overgangsprøve.

(Foraaret 1893.)

1. Find de Vinkler, som en Kant i et regelmæssigt Dodekaeder danner med alle de andre Kanter.

Opløsning. Betragtes det halve Dodekaeder og nummereres Kanterne heri som følger: Bundens Kanter 1 ... 5, de fra Bundens Hjørnespidser opstigende Kanter 6 ... 10, de resterende 11 ... 20 (1, 6, 11, 20, 10 Sider i en af Femkanterne) — ser man, at

1's Vinkel med	8 samt 13 og 18	er 90 ^{0}
» » »	2, 5, 6, 10	» 108 ^{0}
» » »	3, 4, 11, 20, 15, 16	» 36 ^{0}
» » »	12, 14, 19, 17	» 60 ^{0}
» » »	7, 9	» 120 ^{0}.

2. I en retvinklet Trekant er Hypotenosen = 6. Naar man for at u... ...te a dividerer Længdeenheden

ind i den, Resten ind i Længdeenheden og fortsætter paa denne Maade, idet man stadigt dividerer Resten ind i den sidst brugte Devisor, faar man første Gang Kvotienten 5 og de seks næste Gange Kvotienten 2. Hvilken Værdi for a kan derved findes, og hvor nøjagtig er den? Hvis man ved at fortsætte Dicitionerne stadigt faar Kvotienten 2, hvor stor er saa a, og hvor stor er den anden Katete b paa enkelt irrational Form?

Opløsning. $a = 5 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ldots}}$

Tilnærmelsesværdien $\frac{915}{169} = 5{,}4142$; Fejl $\angle \frac{1}{169^2} \angle \frac{1}{10^4}$.

Grænseværdi for den periodiske Kædebrøk $\sqrt{2} + 1$, altsaa

$$a = 5 + \frac{1}{\sqrt{2} + 1} = 4 + \sqrt{2},$$

og $$b = \sqrt{18 - 8\sqrt{2}} = 4 - \sqrt{2}.$$

3. I en plan Trekant ABC er givet: Siden $c = 4{,}321$; Forholdet $\frac{a}{b} = \operatorname{tg} 52^\circ 9' 10''$ og Vinkeldiffenencen $A - B = 20^\circ 1' 10''$. Find Siderne og Vinklerne, samt Arealet, den omskrevne Cirkels Radius og Vinkel C's Halveringslinie.

Opløsning. Ved Benyttelse af de almindelige Formler findes $C = 70^\circ 49' 34''$, $B = 44^\circ 34' 38''$, $A = 64^\circ 35' 48''$.

$$a = 4{,}1323; \quad b = 3{,}2109.$$
$$T = 6{,}2664; \quad R = 2{,}2874.$$
$$v_C = 2{,}9452.$$

4. En regelmæssig sphærisk Ottekants Areal er $= \frac{1}{4}$ af hele Kuglefladen. Find dens Vinkel, Side, mindste og største Radius. Beregn endvidere den Kuglekalot, der begrænses af Polygonens omskaarne Cirkel, og det Kuglesegment, som begrænses af Kalotten, idet Kuglens Radius er $= 1'$.

Opløsning. Vinklen $= \frac{7 \cdot 180^\circ}{8} = 157^\circ 30'$.

$$\cos\frac{a}{2} = \frac{\cos 22^0\,30'}{\sin 78^0\,45'} \text{ giver } a = 39^0\,13'\,12''.$$

$$\cos \sigma = \frac{\cos 78^0\,45'}{\sin 22^0\,30'} \text{ giver } \varrho = 59^0\,20'\,57''.$$

$$\cos r = \cot 22^0\,30' \,.\, \cot 78^0\,45',\quad r = 61^0\,18'.$$

$$\text{Kalotten} = 4\pi \sin^2\frac{r}{2} = 3{,}2658 \text{ Kv.}'.$$

$$\text{Segmentet} = 4\pi \sin\frac{4r}{2}\left(1 - \frac{2}{3}\sin^2\frac{r}{2}\right) = 0{,}70168 \text{ Kb.}'.$$

Skolelærereksamen 1893.

(Løsningerne ved J. Byskov.)

Regneopgave Nr. 1.

(3 Timer.)

A kjøber i England 418,4 Yards Klæde, 1,5 Yard bredt, til en Pris af 7,5 sh. pr. Yard, og 541,6 Yard, 1,25 Yard bredt, til en saadan Pris, at begge Stykker koste lige meget pr. □ Yard. Fragten udgjør 11,86 Kr., og Tolden betales baade efter Værdi og efter Vægt, nemlig med lige saa mange p. C. af Værdien (d. e. Indkjøbspris + Fragt) som Øre pr. Pund (1 dansk □ Alen vejer $\frac{4}{9}$ Pund), hvorefter hvert Stykke Klæde staar ham i en Pris af 2 Kr. 20 Øre pr. □ Alen.

I. Hvor meget udgjør hele Tolden?

II. Hvor mange p. C. er Værditolden?

A sælger derpaa begge Stykker til samme Pris pr. Alen, hvorved han taber lige saa mange p. C. paa det bredeste, som han tjener paa det smalleste.

III. Til hvad Pris sælger han 1 Alen?

IV. Hvor meget vinder eller taber han ved Handelen?

— $1\frac{1}{4}$ dansk Alen; 1 Lstl. = 20 sh. = 17 Kr. 60 Ø.)

aa ved hver Opgave gives saa udførlig, at

ligt ses.

Opløsning. I. Indkp. $= 418,4 \cdot 7,5 + 541,6 \cdot 1,25 \cdot \frac{7,5}{1,5}$
$= 6523$ sh. $= \frac{6523 \cdot 1760}{20} = 5740$ Kr. 24 Ø.

Indkp. + Fragt $= 5740,24 + 11,86 = 5752$ Kr. 10 Øre.
Begge Stykker tilsammen udgør

$$(418,4 \cdot 1,5 + 541,6 \cdot 1,25) \cdot 1\tfrac{1}{2} \cdot 1\tfrac{1}{2} = \frac{9}{4} \cdot 1304,6 \ \square \text{ Alen.}$$

Alle Udgifter $= \frac{9}{4} \cdot 1304,6 \cdot 220 = 6457$ Kr. 77 Øre.

Tolden $= 645777 - 575210 = 705$ Kr. 67 Øre.

II. Begge Stykker vejer $\frac{9}{4} \cdot 1304,6 \cdot \frac{4}{9} = 1304,6$ ℔.
For hver Øre, der betales i Vægttold, bliver hele Tolden

$$1304,6 + 575210 \cdot \frac{1}{100} = 7056,7 \text{ Øre.}$$

Nu er hele Tolden 70567 Øre eller 10 . 7056,7 Øre, altsaa er Vægttolden 10 Øre pr. ℔, og Værditolden 10 p. C.

III. Det første Stykke har kostet ham $220 \cdot 1,5 \cdot 1\frac{1}{2}$ $= 495$ Øre pr. Alen.

Det andet Stykke $220 \cdot 1,25 \cdot 1\frac{1}{2} = 412\frac{1}{2}$ Øre pr. Alen.

Tabet paa 1 Alen af 1ste Stk., lagt til Fortjenesten paa 1 Alen af 2det Stk., giver $495 - 412\frac{1}{2} = 82\frac{1}{2}$ Øre, og da Tabet udgør lige saa mange p. C. af 495, som Fortjeneste af $412\frac{1}{2}$, vil Tab og Fortjeneste forholde sig som disse Tal eller som 6 : 5. Altsaa er Tabet paa 1 Alen af 1ste Stykke $= 82\frac{1}{2} \cdot \frac{6}{6+5} = 45$ Øre, og han har da for 1 Alen faaet $495 - 45 = 450$ Øre.

IV. Antallet af Alen Tøj i begge Stykker
$= (418,4 + 541,6) \cdot 1\frac{1}{2}$.

Hele Udsalgsprisen $= 450 \cdot (418,4 + 541,6) \cdot 1\frac{1}{2}$
$= 648000$ Øre.

Fortjenesten $= 648000 - 645777 = 22$ Kr. 23 Øre.

Regneopgave Nr. 2.

(2 Timer.)

I en Firkant ABCD er AB = 96,122 Fod, BC = 110,91 Fod, $\angle$ D = 90°. Af Diagonalerne, som skjære hinanden under rette Vinkler, er AC = 103,516 Fod. Firkantens Areal søges.

(De større Beregninger udføres ved Logarithmer med Angivelse af, hvilken Tavle der er benyttet.)

Opløsning. Da de 3 givne Linier AB, BC og AC ere henholdsvis 13 . 7,394, 15 . 7,394 og 14 . 7,394, finder man lettest Arealet ved at beregne Arealet af en med den givne ligedannet Figur abcd, hvor ab er 13', bc 15', og ac 14'.

Er o Diagonalernes Skæringspunkt, har man

$$\overline{oc}^2 - \overline{oa}^2 = 15^2 - 13^2 = 56; \quad (oc - oa)(oc + oa) = 56.$$

$$oc - oa = \frac{56}{oc + oa} = \frac{56}{14} = 4.$$

Af denne Ligning og Ligningen oc + oa = 14 faar man

$$oc = 9; \quad oa = 5.$$

Dernæst findes ob = 12; od = $\sqrt{5 \cdot 9} = 3\sqrt{5}$.

$$\triangle\, abc = \frac{14 \cdot 12}{2} = 84\ \square';$$

$$\triangle\, adc = \frac{14}{2} \cdot 3 \cdot \sqrt{5} = 21 \cdot \sqrt{5} = 46{,}956\ \square'.$$

$$abcd = 130{,}956\ \square',$$

og det søgte Areal $\doteq$ 130,956 . $7{,}394^2$.

Ved 5-cifrede Logaritmer faar man da

$$ABCD = 7159{,}5\ \square'.$$

Regneopgave Nr. 3.

(2 Timer.)

Omkring en vandret kvadratisk Plads, hvis Side er 24 Fod, graves en Grøft, 3 Fod dyb, foroven 6, forneden 4 Fod bred, men lodret paa den udvendige Side.

I. Hvor mange Kubikfod udgjør denne Grøft?

Den udgravede Jord lægges paa den kvadratiske Plads i et Lag med vandret Overflade, men med Sideflader, der danne Forlængelser af Grøftens skraa Sider.

II. Hvor tykt bliver dette Lag?

III. Hvor meget maa Grøftens Brede oventil forøges udad (Breden i Bunden uforandret), for at den opgravede Jord kan forhøje Laget til en hel Pyramide?

Opløsning. I. Grøften betragtes som Forskellen mellem et firsidet Prisme (Grøften og Pladsen i 3 Fods Dybde) og en afkortet Pyramide (Pladsen).

$$\text{Kubikindholdet} = 3 \,.\, 36^2 - (28^2 + 28 \,.\, 24 + 24^2)$$
$$= 1856 \text{ Kubikfod.}$$

II. Grøftens skraa Sider tænkes forlængede opad, saa at de danne en Pyramide med Pladsens Overflade som Grundflade. Ved Hjælp af ligedannede Trekanter findes denne Pyramides Højde = 18 Fod, og dernæst dens Kubikindhold $= \frac{1}{3} \,.\, 18 \,.\, 24^2 = 3456$ Kbfd. Naar Jorden, som angivet, lægges oven paa Pladsen, vil den tænkte Pyramide blive fyldt til en Højde af $(18 - x)$ Fod, og der vil da være tilbage af den en Pyramide med Højde = x og Kbindh. $3456 - 1856 = 1600$. Man har da

$$\frac{x^3}{18^3} = \frac{1600}{3456} = \frac{100}{216}; \quad x = 3\sqrt[3]{100} = 13{,}92 \text{ Fod.}$$
$$\text{Tykkelsen} = 18 - 13{,}92 = 4{,}08 \text{ Fod.}$$

III. Grøftens Forøgelse kan betragtes som Forskellen mellem en afkortet Pyramide (hele Rummet inden for den ny Grøfts udvendige Sider i 3 Fods Dybde) og et Prisme (den oprindelige Grøft og Pladsen i 3 Fods Dybde). Man har da, idet Forøgelsen i Bredde betegnes ved x,

$$(36 + 2x)^2 + 36(36 + 2x) + 36^2 - 3 \,.\, 36^2 = 1600;$$
$$x^2 + 54x - 400 = 0;$$
$$x = -27 \pm \sqrt{1129} = -27 \pm 33{,}6 = 6{,}6 \text{ Fod.}$$

Geometrisk Tegning.

Midt paa Papiret tegnes 2 punkterede regelmæssige Femkanter saaledes beliggende, at deres Vinkelspidser ere Vinkelspidser i én regelmæssig Tikant med Siden = ab. Den ene Femkants Diagonaler trækkes med fuld, tyk Linie, den andens punkterede. Den sidstnævntes Vinkelspidser gjøres hver til Centrum for en fint trukket Cirkel, der rører de to Centret nærmeste tykt trukne Diagonaler. I hver af disse Cirkler indskrives 2 punkterede regelmæssige Femkanter, hvis Vinkelspidser tilsammen danne en regelmæssig Tikants, og Femkanternes Diagonaler trækkes med fin Linie.

En replik til Hr. dr. Juel.

(Af cand. mag. N. Nielsen.)

Først maa jeg bringe Hr. dr. Juel min tak for hans anmeldelse. Der findes i den udtalelser, som sammen med de mange andre, jeg har hørt og set privat, er mig en personlig tilfredsstillelse for det langvarige arbejde, hvis første synlige resultat tilfældigvis blev den foreliggende bog.

Men jeg kan dog ikke tilbageholde nogle supplerende bemærkninger, da anmeldelsen visse steder er uklar, selvmodsigende, ja endog ganske fejlagtig.

Det er aldeles meningsløst at bebrejde mig fejl, som staar rettet i bogens errataliste. Saaledes er sætningen i 149 paa ingen maade falsk. Uligheden i 313 staar ligeledes rettet. Disse to fejl falder altsaa til jorden. At der kan findes fejl har jeg jo indrømmet i forordet pag. IV. Og der er andre foruden det falske resultat i 13. F. ex. skal exponenten til

e $\frac{p+1}{2}$ og ikke, som der staar, $\frac{p-1}{2}$.

r baade for langt og for kluntet. Det

simplificeres imidlertid let ved den af mig fulgte syntetiske metode. Jeg finder det aldeles utilladeligt at indsmugle den analytiske geometris skyggeside — dens aandløse regninger — i den rene matematik.

Hvad vil det sige, at opgaver i ren matematik er »abstrakte«, »mangler alle anvendelser«? Mener anmelderen, at jeg i min bog skulde have medtaget f. ex. geometriske opgaver? I saa fald vilde jeg blot gøre den unødvendig tyk. Slige opgaver kan jo, ogsaa efter anmelderens mening, nogenlunde let skaffes ad anden vej. Endvidere vilde jeg derved have overskredet den ramme, jeg ved at sætte ordene ren matematik paa titelbladet har afstukket for min bog. Og endelig finder jeg, at eleverne har mere end tilstrækkeligt af geometri i forvejen, medens den rene matematik er trængt helt i baggrunden — trods dens store Betydning i nutiden.

Hvad anmelderen endvidere paa dette omraade mener med »ligninger udtrykt i ord«, forstaar jeg aldeles ikke.

Jeg er enig med anmelderen om, at løsning af »opgaver med diskussion« er en nyttig tankeøvelse. Men faar man ikke det tilstrækkelig f. ex. i stereometriske eller trigonometriske opgaver? I alt fald plejer jeg at indøve det dér.

Jeg ser da ikke rettere, end at disse anker mod en opgavebog i ren matematik er slaaet til jorden, fordi de er aldeles ubeføjet.

Det ser mærkelig ud at betegne kritiken — eller som anmelderen siger »beskrivelsen« — af induktionsbeviset pag. 4 som uklar. Ti lige umiddelbart efter anvender han de samme sætninger, som jeg har brugt, for at præcisere begrebet matematisk elegance. Og at jeg har gjort det paa samme maade, siger han ikke et ord om.

Det er virkelig ikke nogen »følelse« hos mig, at mange af beviserne burde have været elegantere. Det siger jeg med klare ord i forordet pag. IV. Da anmelderen imidlertid ikke kommer med noget positivt forslag til at hjælpe mig ud over

vanskelighederne, ser jeg altsaa, at han her staar paa den samme »abstrakte« udtalelse som jeg selv. Grunden til, at ikke alle beviser er saa elegante, som de kunde være, at f. ex. induktionsbeviset er brugt saa meget og deslige, har jeg klart udtalt i forordet pag. IV. Grunden er, at mange af opgaverne er revet ud af den sammenhæng, hvori jeg oprindelig fandt dem. Jeg maatte altsaa give ny beviser, hvilket ikke altid var helt let.

Det staar der i forordet, saa det er utilbørligt af anmelderen at sige, at jeg har en »følelse« af det.

Endvidere er det virkelig anmelderens fejl, at han lader sig »overraske« af en ny »definition« for begrebet matematisk elegance. Det, der staar side VI, er nemlig slet ingen definition. Ved at se nærmere efter vil anmelderen finde, at det kun er en afvisning af det fra visse uklare hoveder til mig personlig fremsatte postulat, at den matematiske elegance ikke skulde være et krav, der var uløselig forbundet med selve matematiken. I det hele taget burde anmelderen ud af forordet have set, at de hæftige angreb udtrykkelig er rettet mod nogle pædagoger. Han kender sikkert de fleste af dem.

Højst mærkværdig og aldeles uklar er følgende udtalelse:

»Mærkelig nok synes forfatteren, der paa saa mange steder viser sit fuldstændige Kendskab til exakte metoder, dog lige over for enkelte opgaver at vakle i den henseende.«

Meningen maa naturligvis være den, at jeg ikke burde have medtaget de paaankede opgaver, da jeg vanskelig vil kunne forlange fuldt exakte løsninger af eleverne. Det kan jeg gaa med til. — Jeg véd jo aldeles bestemt, at det ikke kan have været Hr. dr. Juels mening at tilføje mig en ligesaa krænkende som ubeføjet personlig fornærmelse. Nemlig den, at jeg som funktionsteoretiker et eneste øjeblik skulde vakle over for kravet om bevis for rækkens konvergens eller deslige.

Med det samme maa jeg anholde en selvmodsigelse. Den vilde have berørt mig yderst pinlig, hvis den ikke havde

været en — selvmodsigelse. Det er med hensyn til opgavernes tilblivelse.

Allerførst i forordet staar følgende udtalelse:

»Den langt overvejende del af disse opgaver er originale. Hermed være følgelig ikke sagt, at mange af dem eller dog ganske lignende ikke kan findes hos andre forfattere. Det er uundgaaelig paa dette omraade.«

Ikke desto mindre skriver anmelderen:

»Adskillige af dem (opgaverne) er dog originale, selv om det ubetinget ikke er den langt overvejende del som forfatteren »antyder«.

Og lige nedenfor fortæller han, at min bog ikke behøvede den selvkarakteristik, jeg giver den ved at kalde den udklip af mine dagbøger.

Hr. dr. Juel mener naturligvis akkurat det samme som jeg: at jeg visselig har fundet de fleste af opgaverne selvstændig — som sideresultater ved andre matematiske undersøgelser — og at adskillige af dem ikke før har været bekendt.

Jeg har ligeledes udtrykkeligt sagt, at jeg overalt har vedføjet kilden, hvorfra jeg har taget de fremmede opgaver, naar det da ikke var almindelig bekendte læresætninger. Naar anmelderen derfor skriver, at jeg med held har »hentet« flere af mine opgaver fra den højere matematik eller »valgt« dem efter Viète, er faktum, at jeg har taget dem fra mine egne spekulationer over disse æmner.

Den meget omtalte formel af Viète har jeg selv fundet længe før jeg blev student. Først ved at blade i Hoefers aandfulde bog, saa' jeg at den tidligere var fundet af den gamle franskmand, og at Hoefer gav den falsk. Det faldt mig aldrig ind, at en fejltagelse saaledes kunde gaa igen og igen. Jeg troede, det var Hoefers værk.

At de historiske noter skyldes et spredt studium af matematikens historie, har jeg selv udtrykkelig sagt i forordet pag. X. Det var paa ingen maade min mening at give hele matematikens historie i omrids. Jeg an

ledes de i bogen behandlede afsnit af den rene matematik er blevet til. Det er da aldeles uretfærdigt at bebrejde mig, at jeg har tilsidesat grækerne for araberne. Den græske keglesnitslære var mig her lige saa uvedkommende, som den er mig personlig ligegyldig.

Visselig var f. ex. Mohamed ben Musa, født i det ved de senere osmaniske persiske krige saa berømte landskab Khowarezna, ingenlunde en matematiker, der kan maale sig med de store græske geometere. Men hans algebra har haft en saa gennemgribende betydning i den rene matematiks udviklingshistorie, at jeg maatte skænke den en udførlig omtale.

Det, jeg har sagt om Diophant, skyldes en utrolig letsindighed fra min side. Ved selv den mindste eftertanke maatte jeg med mine antropologiske kundskaber strax have set, at det var en fysisk umulighed for en græsk hjærne at rumme en saadan tanke.

Men mod anmelderens paastand om, at mine almindelige betragtninger ere løse, maa jeg paa det skarpeste protestere, naar jeg skal bedømmes ud fra hans synspunkter.

Han skriver:

»Hvad skal man f. ex. sige om en »paastand« som den, at en hovedgrund til den græske matematiks undergang var det græske aandslivs ensidighed i al almindelighed?«

Véd Hr. dr. Juel virkelig ikke, at dette ikke er en »paastand«, som jeg har hittet paa, men en simpel antropologisk grundlov?

Grækernes aandsliv var i højeste grad ensidigt — metafysiken ligger jo uden for baade virkeligheden og fornuften. — Og paa det tidspunkt kunde det ikke være anderledes. Set fra et antropologisk synspunkt, nd fra hvilket man alene formaar at besvare det rejste spørgsmaal, var grækerne et lille intelligent folk, der formaaede at sætte en lige saa kortvarig som straalende top paa den ældgamle titusendaarige kultur, der laa forud for dem. Men alligevel, og til trods for deres

keglesnitslære, havde grækerne bevaret mange barbariske, ja vilde sæder og skikke og forestillinger i rang med avstralnegernes. Derfor, og fordi de vidste altfor lidt, gik de til grunde.

Afsluttende Bemærkninger til Hr. cand. Niels Nielsen.

Min Anmeldelse af Hr. Nielsens »Opgaver i ren Matematik« var præget af mit Ønske om at vise Retfærdighed mod dens gode Sider. Der var nemlig Fare for, at Anerkjendelsen vilde drukne i Indignationen over de anmassende Fordømmelsesdomme, som den indeholder, og dette var uretfærdigt.

Hvis jeg ikke kjendte Hr. Nielsens polemiske Stil fra tidligere Lejligheder, vilde jeg i Anledning af den ovenstaaende Antikritik ansé ham for ualmindelig ømtaalig; nu sér jeg, at han her kun har villet give en mild Tilrettevisning. En Videreførelse af min Kritik skal jeg ikke indlade mig paa; at der findes adskillig flere Feil end de hidtil fremdragne er sikkert, men det har for mig i denne Sag ikke været det væsentlige, og nu paany at fremhæve Bogens Mangler som Skolebog, er der ingen Grund til.

Et Par Bemærkninger nødes jeg dog til at give Svar paa. Det ene er i Anledning af de ulykkelige Bemærkninger om Induktionsbevis S. 4.

Hr. Nielsen synes at mene, at hans uforstaaelige Sætninger desangaaende blive bedre derved, at han paa et andet Sted har sagt noget fornuftigt om en anden Ting, nemlig om mathematisk Elegance, nogle Yttringer jeg gjengav. Dette er i sig nær ved at være sort Tale, men naar han i den Anledning paastaar, at jeg ikke har nævnt, at mine Ord var en Gjengivelse, vil jeg bestemt raade Hr. Nielsen til at læse inden han skriver. (Aargang II, S. 147 nederst.)

Det andet er det, at jeg ikke kan unde Hr. Nielsen Glæden over den formentlige Selvmodsigelse, der skulde ligge i, at jeg paa den ene Side understregede Forf.'s Yttring om Bogen som Udklip af Dagbøger, og paa den anden Side satte et Spørgsmaalstegn ved »den langt overvejende Del af disse Opgaver ere originale.«

Dagbøgerne indeholde nemlig ifølge Forf. Brudstykker, Sideresultater, Hjælpemidler ved Studier over den rene Matematik og dette har paavirket Opgavernes Karakter — efter min Mening pædagogisk uheldig. Hr. Nielsen maa kunne indse, at dette ikke har noget at gjøre med Spørgsmaalet om Opgavernes Originalitet, da Udenforstaaende jo ikke kan vide at Dagbøgerne alene indeholde Ting, der af ham anses for originale. Hr. Nielsen kan tvertimod aldeles ikke gaa ud fra, at Læseren uden videre skal antage vel bekjendte Ting som f. Ex. Vièta's Sætninger for selvstændigt fundne Resultater, særlig naar Forf. i det Hele bærer historisk Lærdom til Skue. Naar han bagefter erklærer det om denne eller hin enkelte Sætning, er det en anden Sag.

C. Juel.

Bevis for, at en Trekant, hvori to Vinkelhalverende ere ligestore, maa være ligebenet.

(Af stud. polyt. Hertz.)

ABC er Trekanten, AE og CD Halveringslinierne. Trekanten ADC er nu løftet op óg dens Plan er drejet 180° saaledes at D falder i A, C i E og A i F.

I Firkanten AFEC har vi nu FE = AC samt:

$$\angle FAC = \angle EAC + \angle EAF = \angle EAC + \angle ADC$$
$$= \angle EAD + \angle ADC = \angle AOC.$$
$$\angle FEC = \angle AEC + \angle AEF = \angle AEC + \angle ACD$$
$$= \angle AEC + \angle DCE = \angle AOC.$$

Et Par modstaaende Sider og et Par modstaaedde Vinkler ere altsaa ligestore.

Nu er $< OAC = 90^0 + \frac{1}{2}B$

og altsaa er de to ligestore Vinkler i Firkanten de største, og Firkanten er da et Parallelogram. Altsaa

$$< AFE = < DAC = < ECA.$$

[Denne Sætning kaldes i Tyskland efter Navnet paa den Mand, der først opstillede den, stundom Lehmus' Sætning. Lehmus forelagde den for den berømte Geometer Jacob Steiner, der ufortøvet beviste den (ad indirekte Vej) og udvidede den paa flere forskjellige Maader. At Beviset overhovedet kan frembyde nogen Vanskelighed beror efter Steiners Mening derpaa, at det i Slutningsrækken ikke er saa let at holde de indvendige og udvendige Vinklers Halveringslinier ude fra hinanden — noget man bedst ser ved at gjennemføre et Landevejsbevis ved Regning.

Det ovenstaaende elegante Bevis hører til de direkte Beviser, af hvilke der i hvert Fald findes meget faa.

Red.]

Løste Opgaver.

89. ABC er en vilkaarlig Trekant. Konstruer 3 rette Linier AA_1, BB_1 og CC_1, gaaende gjennem samme Punkt O, saaledes at Firkanterne AB_1OC_1, BC_1OA_1 og CA_1OB_1 blive omskrivelige.

Opløsning. Lad Trekantens Sider være a, b, c; vi antage $a > b > c$. Den Cirkel, der er indskreven i Firkanten AB_1OC_1 rører BB_1 i M, CC_1 i N; man har da $OC - OB = CN - BM = b - c$ og paa samme Maade $OA - OC$

= c — a, OB — OA = a — b *). Hvis vi fra O afsætter OA ud ad OB og OC (man har OC > OB > OA) til B_2 og C_2, kender man BB_2 = a — b, cc_2 = a — c. En Cirkel med O som Centrum gennem A vil da ogsaa gaa gennem B_2 og C_2 og røre 2 Cirkler om B og C med Radierne BB_2 og CC_2. (J. Petersens M. og Th. Opg. 401.)

Naar man nu kender O kan de 3 Linier AA_1, BB_1, CC_1 drages, og Opgaven er løst.

(H. C. Olsen.)

157. Konstruer en Trekant af Arealet, en Vinkel og Medianen til den modstaaende Side.

Opløsning. Arealet = k . l, k og l givne Linjer. ∠ B er den givne Vinkel, BD den givne Median. Tænkes BD forlænget til E, idet DE = BD, fremkommer der en Trekant BEC, som kan konstrueres. Man kender nemlig Siden BE, Vinkel C = 180° — B og Højden paa BE (= $\frac{kl}{BD}$, Fjerdeprop.). Konstruktionen er følgende: BE afsættes. Derefter hestemmes C liggende dels paa en af de to Cirkelbuer over BE som Korde rummende 180° — B, dels i Højdens Afstand fra BE. To kongruente Løsninger.

(F. V. Tryde.)

(Ogsaa løst af W. van Rochel, M. C. Madsen, H. S. Nielsen, H. C. Olsen, O. A. Smith, P. Schrøder og J. C. Carlsen.)

158. Ved Operation med to oprindelig lige store Kapitaler tabes stadigt, paa den ene 10 % p. a., paa den anden 19 % p. a. Hvor naar bliver Forskellen mellem Kapitalerne saa stor som muligt — og hvor stor er da denne Forskel?

Opløsning. Sættes Kapitalerne lig 1, er Forskellen efter n Aar

---

*) Herved indses følgende Sætning:
Naar en Cirkel bevæger sig, saa at den stadig rører 2 faste rette Linier AB og AC, og man fra 2 faste Punkter B i AB og C i AC drager de andre Tangenter til Cirklen, vil det geometriske Sted for disses Skæringspunkt være en Hyperbel med B og C som Brændpunkter, og hvis Toppunkter er Røringspunkterne for de 2 Cirkler, som røre AB, BC og AC.

$$d = 0{,}90^n - 0{,}81^n = 0{,}9^n - 0{,}9^{2n},$$

hvoraf
$$0{,}9^{2n} - 0{,}9^n + d = 0,$$

$$0{,}9^n = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - d}, \qquad d \leq \frac{1}{4};$$

for $d = \frac{1}{4}$ bliver $0{,}9^n = \frac{1}{2}$, $n = 6{,}578$.

Den største Forskel indtræder altsaa efter 6,578 Aar og er da $\frac{1}{4}$ af de oprindelige Kapitaler. (J. C. Carlsen.)

(Ogsaa løst af W. van Rochel, M. C. Madsen, H. S. Nielsen, H. C. Olsen og P. Schrøder.)

159. Indskriv i en given Cirkel en Firkant, naar der er givet en Side, dens Vinkel med den modstaaende samt Summen af de andre to Sider.

Opløsning. Givet AD, $\angle$ (AD, BC) og AB + CD. Skærer $DD_1 \nparallel BC$ Cirklen i D_1, er $BD_1 = CD$. Punkterne A, D og D_1 kunne straks bestemmes. Derefter kan B bestemmes, idet $\angle ABD_1$ = den givne Vinkel og $AB + BD_1$ = den givne Sum (Petersens M. og Th., Opg. 73). Endelig trækkes $BC \nparallel DD_1$. (J. C. Carlsen)

(Ogsaa løst af H. S. Nielsen, H. C. Olsen og F. V. Tryde.)

160. En tagformet Prismatoide dannes saaledes: Den ene Endeflade er en Rhombe med Siden a og en Vinkel paa 60°. Den rette Linje, hvortil den anden Endeflade er svundet ind, ligger lodret over den af Rhombens Diagonaler, der er a, og er lig med a. Bevis, at Midtersnittet i Prismatoiden er uafhængigt af Højden.

Hvorledes afhænger Voluminet af Højden?

Opløsning. Midtersnittet er en regelmæssig Sekskant, thi hver Side deri er $= \frac{a}{2}$ og hver Vinkel = 120°. Dets Areal er $\frac{3a^2}{8}\sqrt{3}$. Prismatoidens Volumen $\frac{a^2\sqrt{3}}{3} \cdot h$, altsaa ligefrem proportionalt med Højden. (H. C. Ol[illegible])

(Og[illegible]

161. Idet n er positiv hel, og $0 < nx < \frac{\pi}{2}$, skal man bevise:

$$^{1})\ \sin nx < n \sin x$$
$$^{2})\ \operatorname{tg} nx > n \operatorname{tg} x.$$

Opløsning. Paa en Cirkelperiferi med Radius 1 afsættes
$\smile AB = 2(n-1)x,\quad \smile BC = 2x,\quad \smile AC = 2nx.$

[1]) Da er
$$AB = 2\sin(n-1)x,\quad BC = 2\sin x,\quad AC = 2\sin nx;$$
og da
$$AC < AB + BC,$$
er
$$\sin nx < \sin(n-1)x + \sin x,$$
hvoraf
$$\sin(n-1)x < \sin(n-2)x + \sin x,$$
$$\sin(n-2)x < \sin(n-3)x + \sin x,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\sin 3x < \sin 2x + \sin x,$$
$$\sin 2x < \sin x + \sin x,$$
hvoraf ved Addition
$$\sin nx < n \sin x.$$

[2]) Tangenterne i A og C skære hinanden i B, Tangenten i B skærer AB i c og Cb i a. Da er
$$Ac = Bc = \operatorname{tg}(n-1)x,\quad Ba = Ca = \operatorname{tg} x,\quad Ab = Cb = \operatorname{tg} nx;$$
og da
$$bc + ab > ac,$$
$$Ab - Ac + Cb - Ca > Bc + Ba,$$
er
$$2\operatorname{tg} nx - \operatorname{tg}(n-1)x - \operatorname{tg} x > \operatorname{tg}(n-1)x + \operatorname{tg} x,$$
$$\operatorname{tg} nx > \operatorname{tg}(n-1)x + \operatorname{tg} x;$$
paa samme Maade som under [1]) findes da
$$\operatorname{tg} nx > n \operatorname{tg} x.$$
(J. C. Carlsen.)

(Ogsaa bevist — ved Induktion — af H. S. Nielsen og H. C. Olsen.)

162. Bevis, at følgende Relation er gældende i enhver Trekant:
$$T = \sqrt{\tfrac{1}{2} R \cdot h_a \cdot h_b \cdot h_c}.$$

Opløsning. Man har
$$T^3 = \tfrac{1}{8} abc \cdot h_a \cdot h_b \cdot h_c,$$
men
$$abc = 4RT,$$
altsaa
$$T^2 = \tfrac{1}{2} R \cdot h_a \cdot h_b \cdot h_c.$$
(P. Schrøder.)

(Løst af H. S. Nielsen, O. A. Smith, C. E. Schlichtkrull og — d — v.)

163. I en Trekant er givet r, R, s. Dan den Ligning, hvis Rødder ere Trekantens Sider.

Opløsning. Man har

$$a + b + c = 2s, \quad abc = 4RT = 4Rrs,$$

samt

$$r^2 s = (s-a)(s-b)(s-c) = s(ab+bc+ca) - s^3 - 4Rrs,$$

hvoraf

$$ab + bc + ca = s^2 + r^2 + 4Rr.$$

Den søgte Ligning er da

$$x^3 - 2sx^2 + (s^2 + r^2 + 4Rr)x - 4Rrs = 0.$$

(O. A. Smith.)

(Ogsaa løst af H. S. Nielsen, H. C. Olsen, C. E. Schlichtkrull, P. Schrøder og — d — v.)

164. Bevis, at enhver skraa Plan skærer et ret Hjørnes Sideflader i en spidsvinklet Trekant.

Opløsning. De afskaarne Kanter fra Hjørnespidsen regnet være OA $= \alpha$, OB $= \beta$, OC $= \gamma$. Siderne i Trekanten ere da

$$c = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \quad b = \sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}, \quad a = \sqrt{\beta^2 + \gamma^2}.$$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{\alpha^2}{bc},$$

der er positiv, saa at $\angle$ A er spids; ligesaa med de andre Vinkler.

(J. C. Carlsen.)

165. Find to hele positive Tal, om hvilke det gælder, at deres Sum er et Multiplum af deres Produkt.

Opløsning. Kaldes Tallene x og y, er

$$x + y = nxy, \quad n \text{ hel};$$

heraf faas

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = n,$$

der viser at Tallene ere

$$x = y = 1 \quad \text{eller} \quad x = y = 2.$$

(H. S. Nielsen.)

(Ogsaa løst af J. C. Carlsen, P. Schrøder og — d — v.)

166. Find tre hele positive Tal, om hvilke det gælder, at deres Produkt er lig Summen af Produkterne af Tallene »to og to«.

Opløsning. Kaldes Tallene x, y og z, er

$$xyz = xy + yz + zx,$$

der skrives

$$x(yz - y - z) = yz. \qquad (1)$$

[1]) Er $x > y > z$, faas

$$yz - y - z < z, \quad yz - 2z < y,$$

$$yz - 2y < y, \quad z < 3.$$

Ved (1) faas da

for $z = 1$: $x = -y$, ubrugbar;

for $z = 2$: $\frac{x}{y} = \frac{2}{y-2}$,

hvoraf, idet

$$\frac{2}{y-2} \leqq 2 \text{ og } x > y,$$

$$y = 3, \quad x = 6.$$

[2]) Er $x = y$, faas

$$yz - y - z = z$$

$$y - 2 = \frac{y}{z} = \frac{2}{z-1} \leqq 2,$$

hvoraf

$$x = y = z = 3,$$

eller

$$x = y = 4, \quad z = 2.$$

Tallene ere altsaa: 6, 3, 2; 3, 3, 3; 4, 4, 2.

(J. C. Carlsen.)

(Ogsaa løst af H. C. Olsen og — d — v.)

Opgaver til Løsning.

167. Bring Ligningen

$$1 + ab + ac + ad + bc + bd + cd = 0$$

paa simpel Form efter at have udført Substitutionerne

$$a = \frac{1+A}{1-A}, \quad b = \frac{1+B}{1-B}, \quad c = \frac{1+C}{1-C}, \quad d = \frac{1+D}{1-D}.$$

(L. J.)

168. Den blandet periodiske Decimalbrøk $0{,}1\overline{abcd}\,\overline{abcd}\ldots$, hvor intet af Cifrene a, b, c og d er 0, er = en almindelig Brøk med Nævneren 202. Hvilke Værdier kunne a, b, c og d have?

169. I en Cirkel er indskrevet en ligesidet Trekant ABC. En Korde AD af Længden K deler BC i Stykker, der forholde sig som 3 : 2. Find Cirklens Radius udtrykt ved K.

(168—69 af Dr. C. Crone.)

170. En konstant Vinkel glider med sine to Ben rørende hver sin givne Cirkel. Find det geometriske Sted for et Punkt og for en ret Linie, begge i fast Forbindelse med Linjen.

(P. Heegaard.)

171. Tre Børn, der følge efter hinanden med en Aldersforskel af 2 Aar, arve 25000 Kr., der forrentes med 4 p. Ct. p. a. Til Opdragelse bruges til hvert Barn indtil det fyldte 14de Aar aarlig 500 Kr., som hæves ved Slutningen af Aaret. Hvert Barn faar sin Part udbetalt, naar det er 18 Aar, og da faa alle en lige stor Sum 8468 Kr. Børnenes Alder søges.

172. I en Trekant kendes s, R og r. Ved hvilken Ligning bestemmes r_a, r_b og r_c?

173. Find Summen af Rækken

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n,$$

hvor $u_1 = a, \quad u_p = u_{p-1} + 2 + 2(p-1).$

(171—73 af J. C. Carlsen.)

174. Løs Ligningen:

$$x^4 - y^4 = 4641,$$

naar x og y skulle være reelle hele Tal.

175. Find Rødderne i Ligningen:

$$x^4 = \frac{9x^7 + 9x^6 + 9x^5 + 5x^4 + 9x^3 + 9x^2 + 9x + 13}{4x^4 - 4}.$$

(174—75 af H. S. Nielsen.)

176. Gennem Centret O i den omskrevne Cirkel for Trekanten ABC trækkes en Linje parallel med AB til Skæring med AC i E, samt en Linje vinkelret paa AB, skærende en paa AC i A oprejst vinkelret Linje i F. Bevis, at EF er parallel med BC.

177. Bevis, at Talldt $9^n - 8n - 1$ er deleligt med 64.

178. Vis, at $x - 2$ er Faktor i

$$\begin{vmatrix} x & \frac{l}{m} + \frac{m}{l} & \frac{n}{l} + \frac{l}{n} \\ \frac{l}{m} + \frac{m}{l} & x & \frac{m}{n} + \frac{n}{m} \\ \frac{n}{l} + \frac{l}{n} & \frac{m}{n} + \frac{n}{m} & x \end{vmatrix}$$

og find de øvrige Faktorer.

179. Find 4 hele positive Tal af den Beskaffenhed, at deres Sum er lig med Summen af Produktet af det største og mindste af Tallene og Produktet af de to øvrige Tal.

180. Hvor gammel er en Mand i dette Øjeblik, naar hans Alder netop er lig Summen af Ciffrene i hans Fødselsaar.

(176—80 efter Mathesis.)

181.
$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = z\sqrt{2}.$$
$$\sqrt[3]{x^3 + y^3 + z^3} = a(x + y + z).$$
$$\sqrt[n]{x^n + y^n + z^n} = b.$$

Find x, y og z.

(A. Jordan.)

182. Træk en Linie i en given Retning, der skærer to givne Linier i X og Y saaledes, at Linierne AX og BY blive parallele, idet A og B ere givne punkter.

183. Givet to Cirkler, paa den ene et Punkt A, paa den anden et Punkt B; bestem paa cirklerne henholdsvis punkterne X og Y, saa at buerne AX og BY blive ligedannede og

²) PX : PY faar en given Størrelse, naar P er et givet punkt.

³) ∠ PYX faar en given størrelse (spec. 90^0), naar P er et givet Punkt.

⁴) PX : PY faar en given Størrelse, naar P skal falde paa en given Linie, som skal halvere ∠ XPY.

⁵) Linien CD faar en given Længde, idet linien **xy** skærer Cirklerne anden Gang henholdsvis i C og D.

(179—80 af T. Bonnesen.)

184. Læg gjennem to Punkter en Cirkel, der fra et tredie givet Punkt sés under den mindst mulige Vinkel.

(P. Heegaard.)

185. Paa en Cirkel er givet 3 Punkter A, B og C. Bestem et saadant Punkt P paa Cirklen, at

$$\alpha . AB + \beta . BP = CP,$$

hvor α og β ere givne Tal. (C. Juel.)

Rettelse.

I Tidsskriftets Afdeling A for d. A. Side 24 L. 1 f. n. staar »Molekylet« læs »Molekylets Masse«.

Danske Eksamensopgaver.

Adgangseksamen til polyteknisk Læreanstalt.

(Juni 1893.)

I.

I et Plan er givet to udenfor hinanden liggende Cirkler og et Punkt M. Man skal tegne en ligebenet Trekant ABC (AB = BC) saaledes, at AB rører den ene Cirkel i A, BC den anden Cirkel i C, medens AC gaar gennem det givne Punkt M. Hvor mange Opløsninger faas for de forskellige Beliggenheder, som M kan indtage?

Opløsning. Naar AC skærer Cirklen, der indeholder C, anden Gang i C', saa bliver Radierne til A og C' parallele, saa at AC' gaar gennem et Lighedspunkt.

Konstruktionen bliver derfor kun at drage en Linie gennem M og et Lighedspunkt. Tangenter gennem denne Linies uensartede Skæringspunkter med Cirklerne blive AB og BC.

Naar M paa een Gang ligger i begge Tangentpars Tangentvinkler eller dens Topvinkler, saa kan man gennem M trække to Linier, som skære begge Cirkler. Hver Linie giver to Løsninger. Ligger M blot i det ene Tangentpars Vinkel, faas kun een brugelig Linie gennem et Lighedspunkt, og denne giver to Løsninger. Ligger M udenfor begge Tangentvinkler, faas ingen Løsning. Ligger M i et Lighedspunkt, er Opgaven ubestemt; ligger M i et vilkaarligt andet Punkt af Centerlinien, er Opgaven umulig (B falder uendelig fjernt).

II.

1. Find x, y, z af Ligningerne

$$x + y + z = 2n\pi,$$

$$\frac{a}{\sin x} = \frac{b}{\sin y} = \frac{c}{\sin z},$$

- er et helt Tal.

$$a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots a_{n-1},\ a_n, \ldots$$

e Tal. For a_3 og alle følgende Led i

Rækken gælder den Lov, at hvert Led i Rækken er de to foregaaendes Middeltal. Udtryk a_n ved a_1 og a_2.

Opløsning. 1. Af $x + y = 2n\pi - z$

faas $$\sin x \cos y + \cos x \sin y = -\sin z.$$

Indsættes heri

$$\sin x = ak, \quad \sin y = bk, \quad \sin z = ck,$$

faas

enten $$k = 0 \text{ ɔ: } \sin x = \sin y = \sin z = 0$$

$$x = p\pi, \quad y = q\pi, \quad z = r\pi,$$

hvor $$p + q + r = 2n.$$

eller $$a \cos y + b \cos x = -c,$$

desuden er $$a \sin y - b \sin x = 0,$$

kvadreres og adderes, faar man

$$\cos(x + y) = \cos z = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{2\,ab},$$

og de analoge ved Bogstavombytning.

2. $$2\,a_3 = a_1 + a_2$$

$$2\,a_4 = a_2 + a_3$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$2\,a_{n-1} = a_{n-3} + a_{n-2}$$

$$2\,a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$$

Adderes disse Ligninger og reduceres, faar man

$$a_n = \frac{a_1}{2} + a_2 - \frac{1}{2} a_{n-1}$$

$$= \frac{a_1}{2} + a_2 - \frac{1}{2}\left(\frac{a_1}{2} + a_2 - \frac{1}{2} a_{n-2}\right)$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} a_1 \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \cdots \pm \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right] \\ + a_2 \left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdots \mp \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right] \end{array} \right.$$

$$= a_1 \cdot \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}}{3} + 2\,a_2 \cdot \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{3}.$$

III.

1. I et Tetraeder ere tre i en Hjørnespids sammenstødende Sideflader vinkelrette paa hinanden to og to og have givne

Arealer A, B, C. Find Længderne af de tre Kanter, som støde sammen i den nævnte Hjørnespids. Find Arealet af den fjerde Sideflade, Tetraedrets Volumen, Radius i den omskrevne Kugle og Tetraedrets Toplansvinkler.
Eksempel: A = 1,234 □', B = 1,324 □', C = 1,432 □'.

2. At beregne Volumen af det Legeme, som begrænses af en sfærisk Trekant med Vinkler

$$57^0\ 12'\ 15''$$
$$99^0\ \ 8'\ 10''$$
$$43^0\ 12'\ \ 4''$$

og Planerne i det tilhørende Hjørne med Toppunkt i Kuglens Centrum. Radius er 8,5276'.

Opløsning. 1. Kanternes Længder betegnes x', y', z' den fjerde Sideflades Areal D □', Volumen V Kub.', Radius R', Vinklerne α, β og γ.

Da er

$$xy = 2\ A,\ xz = 2\ B,\ yz = 2\ C,$$

hvoraf $x = \sqrt{\frac{2\,AB}{C}}$,

$$y = \sqrt{\frac{2\,CA}{B}} \text{ og } z = \sqrt{\frac{2\,CB}{A}}.$$

log 2 = 0,30103	log 2 = 0,30103	log 2 = 0,30103
log A = 0,09132	log A = 0,09132	log B = 0,12189
log B = 0,12189	log C = 0,15594	log C = 0,15594
0,51424	0,54829	0,57886
log C = 0,15594	log B = 0,12189	log A = 0,09132
log x^2 = 0,35830	log y^2 = 0,42640	log z^2 = 0,48754
log x = 0,17915	log y = 0,21320	log z = 0,24377
x = 1,5106	y = 1,6338	z = 1,753
x^2 = 2,2819	z^2 = 2,6693	z^2 = 3,0729

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \frac{1}{2}\sqrt{8{,}0241}$$

$$\log R = \begin{cases} 0{,}45220 \\ \underline{0{,}30103} \\ 0{,}15117 \end{cases} \quad R = 1{,}4164$$

$$V = \frac{1}{3} A . z$$

$$\log V = \begin{cases} 0{,}09132 \\ \underline{0{,}24377} \\ 0{,}33509 \\ \underline{0{,}47712} \\ 0{,}85797 - 1 \end{cases} \quad V = 0{,}72105.$$

$$D^2 = A^2 + B^2 + C^2$$

$$\begin{array}{llll} 2 \log A = 0{,}18264 & A^2 = 1{,}5228 \\ 2 \log B = 0{,}24378 & B^2 = 1{,}753 \\ 2 \log C = 0{,}31188 & \underline{C^2 = 2{,}0506} \\ & \quad\quad 5{,}3264 \\ & \quad\quad 0{,}72643 \end{array}$$

$$\log D = 0{,}36322$$

$$D = 2{,}3079$$

$$\cos\alpha = \frac{A}{D}; \log\cos\alpha = \begin{cases} 0{,}09132 \\ \underline{0{,}36322} \\ 9{,}72810 - 10 \end{cases}$$

$$\alpha = 57^0\ 40'\ 39''$$

$$\log\cos\beta = \begin{cases} 0{,}12189 \\ \underline{0{,}36322} \\ 9{,}75867 - 10 \end{cases}$$

$$\beta = 54^0\ 59'\ 33''$$

$$\log\cos\gamma = \begin{cases} 0{,}15594 \\ \underline{0{,}36322} \\ 9{,}79272 - 10 \end{cases}$$

$$\gamma = 51^0\ 39'$$

2. $$V = \frac{e}{720^0} . \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{70349}{720 . 60^2} . \frac{4}{3} \pi . 8{,}5276^3$$

$$\log V = 1{,}84820; \ V = 70{,}502.$$

Det søgte Volumen er 70,502 Kubikfod.

IV.

I et retvinklet Koordinatsystem har man givet et Punkt (a, b) og en Parabel $y^2 = px$.

1) Angiv den Ligning, som bestemmer Ordinaterne til de af Parablens Punkter, hvis Normaler gaa gennem (a, b).

2) Hvilken Betingelse eller hvilke Betingelser maa være opfyldte, naar to eller tre saadanne Normaler skulle falde sammen?

3) Hvorledes kan man, naar ingen Sammenfalden mellem Normalerne finder Sted, bevise, at den Cirkel, som gaar gennem de i 1) nævnte Punkter af Parablen, ogsaa gaar gennem Parablens Toppunkt?

Opløsning. 1) Skal Normalen til Punktet (x, y) gaa gennem (a, b), maa man have:

$$b - y = -\frac{2y}{p}\left(a - \frac{y^2}{p}\right),$$

eller

$$y^3 - \frac{p\,(2a - p)}{2}\,y - \frac{bp^2}{2} = 0.$$

2) Kaldes Rødderne i denne Ligning for y_1, y_2 og y_3, har man:

$$y_1 + y_2 + y_3 = 0;\quad y_1 y_2 y_3 = \frac{bp^2}{2};$$

$$y_1 y_2 + y_2 y_3 + y_3 y_1 = \frac{-p\,(2a - p)}{2}.$$

For $y_1 = y_2$ faar man mellem a, b, p Ligningen

$$\frac{27}{16} b^2 p = \left(a - \frac{p}{2}\right)^3.$$

For $y_1 = y_2 = y_3$ faas $a = \frac{p}{2}$, $b = 0$.

3) 1ste Maade: Ligningen for Cirklen gennem Normalernes Fodpunkter er:

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ \frac{y_1^4}{p^2} + y_1^2 & \frac{y_1^2}{p} & y_1 & 1 \\ \frac{y_2^4}{p^2} + y_2^2 & \frac{y_2^2}{p} & y_2 & 1 \\ \frac{y_3^4}{p^2} + y_3^2 & \frac{y_3^2}{p} & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Skal Cirklen gaa igennem (o, o), maa man have

$$\begin{vmatrix} \frac{y_1^4}{p^2} + y_1^2 & \frac{y_1^2}{p} & y_1 \\ \frac{y_2^4}{p^2} + y_2^2 & \frac{y_2^2}{p} & y_2 \\ \frac{y_3^4}{p^2} + y_3^2 & \frac{y_3^2}{p} & y_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Dette ændres ved bekendte Omformninger til

$$\frac{y_1 y_2 y_3}{p^3} (y_2 - y_1)(y_3 - y_1)(y_3 - y_2)(y_1 + y_2 + y_3) = 0,$$

hvilket er rigtigt, da $y_1 + y_2 + y_3 = 0$.

2den Maade: Af Ligningerne

$$b - y = -\frac{2y}{p}(a - x)$$

eller $$bp - py = -2ay + 2xy \qquad (1)$$

og $$px = y^2 \qquad (2)$$

dannes $$[(2).2x - (1).y]$$

$$2px^2 + py^2 - bpy = 2ay^2 \qquad (3)$$

(3) — (2) . 2a giver

$$2px^2 + py^2 - pby - 2apx = 0 \qquad (4)$$

(4) : p — (2) giver endelig

$$2x^2 + 2y^3 - by - (2a + p)x = 0,$$

der bestemmer en Cirkel gennem Begyndelsespunktet.

Afgangseksamen for studerende.

(Juni 1893.)

Aritmetik.

1. Ved en Indsamling, som foretoges i et Selskab, der bestod af baade Mænd, Kvinder og Børn, men af flere Mænd end Kvinder, indkom der ialt 20 Kr. 50 Øre, idet hver Mand gav 2 Kr. 25 Øre, hver Kvinde 3 Kr. 50 Øre, og hvert Barn 75 Øre. Hvor mange Mænd var der, hvor mange Kvinder. og hvor mange Børn?

2. En Gæld afbetaltes i tre Aar med aarlige Afdrag, af hvilke det første, der betaltes et Aar efter Gældens Stiftelse, kun udgjorde et Aars Rente af Gælden, det andet var tre Gange saa stort som det første, og det sidste dobbelt saa stort som det andet. Hvor stor var den aarlige Rentefod?

Opløsning. 1. Kaldes Antallet af Mænd, Kvinder og Børn henholdsvis x, y og z, faar man

$$225x + 350y + 75z = 2050$$

eller

$$9x + 14y + 3z = 82.$$

Prøver man med $y = 1, 2, 3, 4, 5$ finder man, at Ligningen kun for $y = 2$ og $y = 5$ kan have Løsninger i hele Tal. Betingelsen $x > y$ giver dernæst, at der kun bliver de tre Løsninger:

$$x = 3, 4, 5$$
$$y = 2, 2, 2$$
$$z = 9, 6, 3.$$

2. $$(1 + r)^3 = r(1 + r)^2 + 3r(1 + r) + 6r$$

reduceres til

$$2r^2 + 7r - 1 = 0,$$

hvoraf

$$r = \frac{\sqrt{57} - 7}{4} = \text{c. } 0{,}14.$$

Geometri.

1. Konstruer en Trekant af en Side, Differensen mellem de to Vinkler, der ligge ved denne Side, og den omskrevne Cirkels Radius.

2. I en spidsvinklet Trekant fældes Højderne, og deres Fodpunkter forbindes med rette Linier. Find den derved dannede Trekants Vinkler, Sider samt omskrevne og indskrevne Cirkels Radius udtrykte ved den første Trekants Vinkler og omskrevne Cirkels Radius.

3. Til et Punkt (a, b) af Parablen $y^2 = px$ trækkes Tangenten. Find Koordinaterne til denne Tangents Pol med Hensyn til Cirklen $x^2 + y^2 = r^2$, og find dernæst det geometriske Sted for denne Pol, naar Punktet (a, b) gennemløber Parablen.

Opløsning. 1. Man kan straks tegne den omskrevne Cirkel, da Radien R er givet, og deri afsætte den givne Side a som Korde (saafremt $a \leqq 2R$). Den modstaaende Vinkelspids faar man derpaa som det ene Endepunkt af en med a parallel Korde, der af Cirklen afskærer en Bue, hvis (numerisk bekendte Vinkelstørrelse er $2(B - C) = 2D$.

Naar der findes to Værdier for A, ville vi kalde den mindste af disse for α. Der bliver da, idet kongruente Løsninger ikke holdes ude fra hinanden:

[1]) naar $a > 2R$, ingen Løsning.

[2]) naar $a = 2R, D \geqq 90^0$, ingen Løsning.

» » » $D < 90^0$, 1 Løsning.

[3]) naar $a < 2R, D \geqq 180 - v$, ingen Løsning.

» » » $180 - v > D \geqq v$, 1 Løsning.

$0 \leqq D < v$, 2 Løsninger.

2. Kaldes Højderne AA_1, BB_1, CC_1, blive Trekanterne ABC og AB_1C ligedannede i Forholdet $\frac{AB_1}{AB} = \cos A$. Man faar derfor $a_1 = B_1C_1 = a \cos A = R \sin 2A$, og paa samme Maade $b_1 = A_1C_1 = R \sin 2B$; $c_1 = A_1B_1 = R \sin 2C$.

Ved Hjælp af de samme Par indbyrdes ligedannede Trekanter som før bliver endvidere i Trekant $A_1B_1C_1$

$A_1 = 180^0 - 2A$, $B_1 = 180^0 - 2B$, $C_1 = 180^0 - 2C$.

Kaldes de søgte Cirklers Radier for R_1 og r_1, faas videre

$$R_1 = \frac{a_1}{2 \sin A_1} = \frac{R}{2}$$

$$r_1 = a_1 \frac{\sin \frac{B_1}{2} \sin \frac{C_1}{2}}{\cos \frac{A_1}{2}} = 2R \cos A \cos B \cos C.$$

3. Parabel Tangentens Ligning er

$$2by = p(a + x) \qquad (1)$$

hvor $$b^2 = pa. \qquad (2)$$

Koordinaterne (ξ, η) til Polen faar man v[illegible] n-ligne (1) med

$$\xi x + \eta y = r^2, \tag{3}$$

hvoraf
$$\xi = -\frac{r^2}{a}, \eta = \frac{2br^2}{pa}. \tag{4}$$

Elimination af a og b mellem (2) og (4) giver det geometriske Sted for Polen

$$y^2 = -\frac{4r^2}{p}\xi,$$

der er en Parabel med Parameteren $\frac{4r^2}{p}$, hvis Brændpunkt ligger paa den negative Del af X-aksen.

Beregningsopgave.

Sidefladerne i en femsidet Pyramide med regulær Grundflade ere ligesidede Trekanter. Beregn Vinklen mellem en Sidekant og Grundfladen, Toplansvinklen mellem en Sideflade og Grundfladen, Toplansvinklen mellem to Nabosideflader og Forholdet mellem Pyramidens om- og indskrevne Kuglers Rumfang.

Opløsning. Lad Kantlængden i Pyramiden være a, Vinklen mellem Kant og Grundflade x, mellem Sideflade og Grundflade y, mellem to Sideflader u. Man faar da

$$\cos x = \frac{1}{2 \sin 36^0}; \log \cos x = 9{,}92975 - 10$$

$$x = 31^0 43' 8''$$

$$\cos y = \frac{\frac{a}{2} \cot 36^0}{a \sin 60^0} = \frac{\cot 36^0}{\sqrt{3}}$$

$$\log \cos y = 9{,}90018 - 10$$

$$y = 37^0 22' 36''$$

$$\sin\frac{u}{2} = \frac{\cos 36^0}{\sin 60^0}; \log \sin\frac{u}{2} = 9{,}97043 - 10$$

$$u = 138^0 11' 36''$$

Ere r og R Radierne i den ind- og omskrevne Kugle, faar man

$$r = \frac{a}{2} \cot 36^0 \operatorname{tg}\frac{y}{2}.$$

$$R = \frac{a}{2 \sin x}, \text{ altsaa}$$

$$\frac{R}{r} = \frac{1}{\sin 31^{\circ}43'8'' \cot 36^{\circ} \operatorname{tg} 18^{\circ}41'8''}$$

$$\log \frac{R}{r} = 0{,}61124$$

$$3 \log \left(\frac{R}{r}\right) = 1{,}83372$$

$$\left(\frac{R}{r}\right)^3 = 68{,}19$$

Lægger man Mærke til, at den behandlede Pyramide er en Del af et Ikosaeder faas Kontrol paa Regningens Rigtighed, hvorved dog den fra Logaritmetavlens Brug hidrørende Fejl ikke vil findes forsvindende. Beregnes saaledes u efter Formlen

$$\cos u = -\frac{\sqrt{5}}{3}$$

faar man $$u = 138^{\circ}11'24''.$$

Projektionstegning.

Grundfladen i en Pyramide t — abcdef er en regelmæssig Sekskant, hvis Side er omtrent $1\frac{1}{2}$ Tomme lang; Kanten ta er dobbelt saa lang som Grundfladens Side, og Vinklerne tab og taf ere hver 72°.

Tegn Billederne af denne Pyramide, idet den staar paa den vandrette Billedplan, og cd ligger i Grundlinien (Projektionsaksen).

Tegn dernæst Billederne af det retstaaende tresidede Prisme, hvis Grundflade er Trekanten bdf, og hvis Højde er halv saa stor som Pyramidens.

Tegn endelig Billederne af de to Legemers Skæringslinie.

Almindelig Forberedelseseksamen.

(Juni 1893.)

Aritmetik.

1. Efter at have angivet og bevist den Regel, hvorefter en ren periodisk Decimalbrøk omdannes til almindelig Brøk, skal man finde

$$\sqrt[3]{37{,}037\,037\ldots}$$

2. $$\frac{1}{6(\sqrt{x}-1)} - \frac{1}{6(\sqrt{x}+1)} + \frac{2}{3(x+2)}$$

trækkes sammen til een Brøk, og Værdien af denne angives, naar man for x efterhaanden indsætter — 2, — 1, 0, 1, 2.

3. Tre Tal danne en Kvotientrække. Find Tallene, naar deres Sum er 13 og Produkt 27.

Opløsning. 1. $\sqrt[3]{37{,}\underline{037}\,037\ldots}$

$$= \sqrt[3]{37\frac{37}{999}} = \sqrt[3]{\frac{37000}{999}} = \sqrt[3]{\frac{1000}{27}}$$

$$= \tfrac{10}{3} = 3\tfrac{1}{3} = 3{,}\underline{33}\ldots$$

2. $$\frac{(x+2)(\sqrt{x}+1-\sqrt{x}+1)+4(x-1)}{6(x-1)(x+2)}$$

$$= \frac{x}{(x-1)(x+2)}$$

Indsættelsesresultaterne: ∞, $\frac{1}{2}$, 0, ∞, $\frac{1}{2}$.

3. Kaldes Tallene x, y og z,

haves $\frac{x}{y} = \frac{y}{z}$ eller $y^2 = xz$ (1)

$x + y + z = 13$ (2)

og $xyz = 27$ (3)

(1) og (3) give straks

$$y^3 = 27, \text{ altsaa } y = 3.$$

Derefter give (2) og (3)

$$x + z = 10 \text{ og } xz = 9,$$

hvoraf $\left.\begin{matrix}x\\z\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}9\\1\end{matrix}\right.$

Geometri.

1. Konstruer en retvinklet Trekant af de Stykker, hvori den rette Vinkels Halveringslinie deler Hypotenusen.

2. Tegn en stumpvinklet Trekant ABC samt den Cirkel, der gaar gennem den stumpe Vinkels Toppunkt C og Midtpunkterne M og N af de hosliggende Sider. — Bevis, at Forbindelseslinien mellem C og et af Cirklens Skæringspunkter med AB deler MN saaledes i Pnnktet E, at EC er Mellemproportional mellem de to Stykker.

3. Fra et Punkt M i en Cirkelperiferi trækkes en Linie til et vilkaarligt Punkt P af den Diameter AB, der er vinkelret paa Radius OM. Find MP, naar AP = 7', BP = 17'.

Opløsning. 1. De to givne Stykker afsættes ved Siden af hinanden paa en ret Linie som AM og MB. Over AB som Diameter tegnes en Cirkel; Midtpunktet af den ene Halvcirkel forbindes med M, og denne Forbindelseslinies Skæringspunkt med den anden Halvcirkel er Trekantens tredje Vinkelspids. Opgaven er altid mulig.

2. Kaldes det betragtede Skæringspunkt F, er ifølge Sætningen om et Punkts Potens m. H. t. en Cirkel

$$ME.EN = FE.EC.$$

Men ifølge en anden bekendt Sætning i Geometrien er

$$MN \neq AB,$$

og da $AM = MC$, bliver $FE = EC$,

altsaa $ME.EN = EC^2$ hv. sk. bev.

3. $AB = 24',$

altsaa $OM = 12'$ og $PO = 5'$.

Antages $PM = x',$

haves $x^2 = 12^2 + 5^2, x = 13.$

Altsaa $PM = 13'$.

Regning.

1. Med en Arbejdsstyrke af 32 Mænd, 40 Kvinder, 20 Børn vilde et Arbejde kunne udføres i 80 Dage·

16 Dages Forløb forlade 14 Mænd og 5 Børn Arbejdet, hvorimod der tilgaar 10 Kvinder. Naar det nu antages, at hver Kvindes daglige Arbejdsydelse er $\frac{4}{5}$ af hver Mands, og hvert Barns $\frac{2}{5}$ af hver Mands, hvorlænge vil det da vare, inden Arbejdet bliver fuldført? — Hvor stor er den samlede Arbejdsløn, naar hver Mand faar 3 Kr. 15 Øre, hver Kvinde 1 Kr. 75 Øre, hvert Barn 65 Øre om Dagen?

2. Gennem en Metalblok, hvis Rumfang er 59,6344 Kubikfod, bores der et Hul af Form som en Keglestub (afkortet Kegle), hvis Grundflades Diametre ere henholdsvis 1,038′ og 0,925′, medens Højden er 2,83′. Hvor stort er Rumfanget af den resterende Metalmasse, og hvor stor er dens Vægtfylde, naar den vejer 29817 ℔?

Oplysninger: Rumfanget af en Keglestub er

$$\frac{\pi}{3} h \left[(R+r)^2 - Rr\right],$$

hvor h er Højden, R og r Grundfladernes Radier. 1 Kubikfod Vand vejer 61,829 ℔.

Opløsning. 1. Den første Arbejdsstyrke er ensgældende med 72 Mænd, den anden med 64 Mænd.

72 M. udføre $\frac{1}{5}$ Arb. i 16 Dage
64 M. » $\frac{4}{5}$ Arb. i x »

$$x = \frac{16 \cdot 72 \cdot 4}{64} = 72.$$

Til at udføre hele Arbejdet medgaar 88 Dage.
Arbejdslønnen udregnes let til

$$2940{,}80 \text{ Kr.} + 11084{,}40 \text{ Kr.}$$
$$= 14025{,}20 \text{ Kr.}$$

2. Hullets Rumfang er

$$\frac{\pi}{3} \cdot 2{,}83 \left[0{,}9815^2 - 0{,}519 \cdot 0{,}4625\right] \text{ Kub}'.$$
$$= 2{,}1436 \text{ Kub}'.$$

Resterende Metalmasse = 57,4908 Kub′.

$$\text{Vægtfylde} = \frac{29817}{57{,}4908 \cdot 61{,}829}$$
$$= 8{,}3884.$$

Løste Opgaver.

168. Den blandet periodiske Decimalbrøk $0,1\overline{abcd}$ abcd.., hvor intet af Cifrene a, b, c og d er 0, er = en almindelig Brøk med Nævneren 202. Hvilke Værdier kunne a, b, c og d have?

Opløsning. Man har $99990 = 202 . 5 . 9 . 11$. Altsaa skal Tallet 1abcd — 1 være deleligt med 5, 9 og 11, hvoraf faas: $d = 6$ eller 1;

$$b + d + a + c = 9x (x = 1, 2, 3)$$

og $$b + d - (a + c) = 11y (y = -1, 0, 1).$$

Af de to sidste faas

$$b + d = \frac{9x + 11y}{2},$$

$$a + c = \frac{9x - 11y}{2}.$$

Man ser da, at kun $x = 2, y = 0$ ere brugelige, og man faar $a + c = 9$

$$ɔ: a = 1, 2 \ldots 8 \text{ og } c = 8, 7 \ldots 1$$

$$b + d = 9 \text{ ɔ: } d = 1, 6 \text{ og } b = 8, 3.$$

(C. E. Schlichtkrull, H. S. Nielsen.)

169. I en Cirkel er indskrevet en ligesidet Trekant ABC. En Korde AD af Længde K deler BC i Stykker, der forholde sig som 3 : 2. Find Cirklens Radius udtrykt ved K.

Opløsning. Kaldes Kordens to Stykker x og y (y Stykket i Trekanten) haves:

$$xy = \frac{18}{25}r^2, \; x + y = K, \; y^2 = \frac{57}{25}r^2$$

hvoraf: $$r = \frac{k}{15}\sqrt{57}$$

(H. S. Nielsen.)

171. Tre Børn, der følge efter hinanden med en Aldersforskel af 2 Aar, arve 25000 Kr., der forrentes med 4 p. Ct

p. a. Til Opdragelse bruges til hvert Barn indtil det fyldte 14de Aar aarlig 500 Kr., som hæves ved Slutningen af Aaret. Hvert Barn faar sin Part udbetalt, naar det er 18 Aar, og da faa alle en lige stor Sum 8468 Kr. Børnenes Alder søges.

Opløsning. Lad paa den Tid Kapitalen arves, det ældste Barn være $14 - x$ Aar.

Naar det yngste Barn fylder 14 Aar, ejes da en Kapital: $25{,}000 . 604^{x+4} - A$,

hvor: $$A = \frac{1500}{0{,}04}(1{,}04^x - 1) . 1{,}04^4$$

$$+ \frac{1000}{0{,}04}(1{,}04^2 - 1)\, 1{,}04^2 + \frac{500}{0{,}04}(1{,}04^2 - 1)$$

Ligningen: $[(25000 . 1{,}04^{x+4} - A - 8468)\, 1{,}04^2 - 8468]\, 1{,}04^2 = 8468$

giver da: $$x = 4.$$

Den søgte Alder er da: 10, 8, 6 Aar. (H. S. Nielsen.)

172. I en Trekant kendes s, R og r. Ved hvilken Ligning bestemmes r_a, r_b og r_c?

Opløsning. Af: $r_a = \frac{T}{o - a} = \frac{r s}{s - a}$ og analoge findes, idet i Følge Opg. 163. $ab + ac + bc = s^2 + r^2 + 4Rr$:

$$r_a + r_b + r_c = \frac{1}{r}[(s - b)(s - c) + (s - a)(s - b) + (s - a)(s - c)] = r + 4R.$$

$$r_a . r_b + r_a . r_c + r_b . r_c = s[s - a + s - b + s - c] = s^2;$$

$$r_a . r_b . r_c = r s^2.$$

Den søgte Ligning er altsaa:

$$x^3 - (r + 4R)x^2 + s^2 x - r s^2 = 0.$$

(C. E. Schlichtkrull, H. S. Nielsen.)

173. Find Summen af Rækken

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n,$$

hvor $$u_1 = a, \quad u_p = u_{p-1} + 2 + 2(p - 1).$$

Opløsning. Man kan skrive $u_p = a + p(p - 1) + 2$

Nu er som bekendt $\sum_{1}^{n}(p-1)p = \frac{1}{3}(n-1)n(n+1)$ altsaa:

$$u_1 + u_2 + \ldots u_n = na + \frac{n}{3}(n^2-1) + n(n-1).$$

(H. S. Nielsen.)

175. Find Rødderne i Ligningen:

$$x^4 = \frac{9x^7 + 9x^6 + 9x^5 + 5x^4 + 9x^3 + 9x^2 + 9x + 13}{4x^4 - 4}.$$

Opløsning. Ligningen omskrives til

$$4x^8 - 9(x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x) - 13 = 0$$

hvor $x = -1$ er Rod

altsaa:

$$(x+1)\ (4(x^7 + x^5 + x^3 + x) - 13(x^6 + x^4 + x^2 + 1)] = 0.$$

$$(x+1)\ (x^6 + x^4 + x^2 + 1)\ (4x - 13) = 0$$

$$(x+1)\ (x^2 + 1)\ (x^4 + 1)\ (4x - 13) = 0.$$

Ligningens Rødder ere altsaa:

$$x = \begin{cases} -1 \\ \pm i \\ \pm \frac{\sqrt{2}}{2}(1 \pm i) \\ \frac{13}{4} \end{cases}$$

(C. E. Schlichtkrull.)

Udkomne Bøger.

Simeon Larsen: Smaa geometriske Extemporalopgaver særlig til Brug for Realskolernes øverste Klasse, Latinskolernes 4de Klasse, Seminarier og tekniske Skoler. (Odense, Hempel.)

P. Krogh Jensen: Geometriske Konstruktionsopgaver, ordnede til Skolebrug. Tredje Udgave. (København, Gad.)

Danske Eksamensopgaver.

Skolelærer- og Skolelærerinde-Eksamen.

(Oktober 1893.)

Regneopgave Nr. 1.

(3 Timer.)

(Fællcs for Lærere og Lærerinder)

A. fører tll England i sit eget Skib 519 Tdr. 6 Skpr. Byg, som han har kjøbt for 10,72 Kr. Tønden, og medtager for B. 346 Tdr. 4 Skpr. Rug, som have kostet 13,40 Kr. pr. Tønde. Af Fortjenesten paa begge Kornsorter skal A. først have i Fragt $5\frac{5}{7}$ pCt. af Rugens Indkjøbspris, og den øvrige Fortjeneste fordeles med $\frac{1}{3}$ paa Skibet, Resten paa Varerne i Forhold til det, de have kostet i Indkjøb.

(Spørgsmaal for Lærere)

I. Hvis Rugen sælges for 18 sh. Tønden, og B.'s rene Fortjeneste udgjør 335 Kr. 40 Øre, hvad var da Salgsprisen for 1 Td. Byg i engelske Penge?

II. Hvis Byggen sælges for 14 sh. Tønden, og A.'s hele Udbytte (d. e. Fragt + Fortjenesten paa Skibet og paa Byggen) udgjør 1107,58 Kr., hvad har man da faaet i Udsalg for 1 Td. Rug?

III. Hvis man fik $2\frac{1}{2}$ sh. mere for 1 Td. Rug end for 1 Td. Byg, og A.'s hele Udbytte ved Handelen var 941,58 Kr. større end B.'s, til hvilke Priser solgtes da 1 Td. af hver Sort?

(1 Lstl. = 20 sh. = 17,40 Kr.)

(Spørgsmaal for Lærerinder)

I. Hvis Rugen sælges for 18 sh., Byggen for $13\frac{1}{3}$ sh. pr. Tønde, hvor meget af Fortjenesten faar da hver?

II. Hvis Byggen sælges for 14 sh. pr. Tønde, og A.'s hele Udbytte (d. e. Fragt + den Fortjeneste, der falder paa Skibet og paa Byggen) udgjør 1107 Kr. 58 Øre, hvad blev da 1 Td. Rug solgt for i engelske Penge?

III. Hvis Salgsprisen pr. Tønde Rug og Byg forholder sig som 7 til 6, hvor store maa da disse Priser være, for at A.'s hele Udbytte kan blive 1461 Kr. 78 Øre?

Besvarelse. Byggen har kostet 5571,72 Kr., Rugen 4643,10 Kr., ialt 10214,82 Kr. Priserne forholde sig som 6 : 5. A's Part af Fortjenesten er $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{6}{11} = \frac{23}{33}$, B's $\frac{10}{33}$; Fragten af Rugen 265,32 Kr.

I. Fortjenesten 335,40 : $\frac{10}{33}$ = 1106,82 Kr.
Fragten . . . . 265,32 -
Kornets Værdi . . . . 10214,82 -
ialt 11586,96 Kr.
eller 13167 sh.
Rugen solgt for 18 . 346½ = 6237 -
Byggen solgt for . . . . . . 6930 sh.

eller for 13⅓ sh. pr. Tønde.

A's Fortjeneste har været 1106,82 — 335,40 + 265,32 = 1036,74 Kr.

II. A's Fortjeneste . . . . 1107,58 Kr.
B's Fortjeneste (1107,58 — 265,32) . $\frac{10}{23}$ = 366,20 -
Kornets Værdi . . . . 10214,82 -
ialt 11688,6 Kr.
eller 13282½ sh.
Byggen solgt for 14 . 519¾ . . . . . . = 7276½ -
Rugen solgt for . . . . 6006 sh.

eller 17⅓ sh. pr. Tønde.

III. Fortjenesten (941,58 — 265,32) : $\frac{13}{33}$ = 1716,66 Kr.
Fragten . . . . 265,32 -
Kornets Værdi . . . . 10214,82 -
12196,8 Kr.
eller 13860 sh

hver Tønde Byg solgt for $\frac{13860 - 2\frac{1}{2} \cdot 346\frac{1}{2}}{519\frac{3}{4} + 346\frac{1}{2}} = 15$ sh., og hver Tønde Rug for $17\frac{1}{2}$ sh., hvilke Priser forholde sig som 6 : 7 (A's Fortjeneste $1716{,}66 \cdot \frac{23}{33} + 265{,}32 = 1461{,}78$ Kr.)

Regneopgave Nr. 2.

(2 Timer.)

(For Lærere)

En Landmand har 6 Heste, 24 Køer og 64 Faar samt Foder til dem i 180 Dage. Efter 24 Dage sælger han 2 Heste og 4 Køer; 17 Dage senere kjøber han 1 Hest, 8 Køer og 2 Faar, og 116 Dage derefter vil han sælge et Antal Heste og 4 Gange saa mange Faar saaledes, at Foderet kan vare de bestemte 180 Dage.

I. Hvormange Heste maa sælges?

II. Hvis det oprindelige Forraad skal vare $202\frac{1}{2}$ Dage, og han i sin Tid vil holde 4 Gange saa mange Køer som Heste og 3 Gange saa mange Faar som Køer, hvor mange af hver Slags skal han da have?

Det antages, at en Ko daglig fortærer 75 pCt. mere end et Faar, men 25 pCt. mindre end en Hest.

Besvarelse. Efter det givne kan en Hest sættes lig med $\frac{7}{3}$ Faar, en Ko lig med $\frac{7}{4}$ Faar; 6 Heste, 24 Køer og 64 Faar blive altsaa at regne for 120 Faar. Foderportionernes Antal ere $120 \cdot 180 = 21600$; af disse er brugt $120 \cdot 24 + (120 - 11\frac{2}{3})\,17 + (108\frac{1}{3} + 18\frac{1}{3})\,116 = 19415$, tilbage altsaa 2185. Kaldes Hestenes Antal x, har man

$$\text{I.}\quad 126\frac{2}{3} - \frac{2185}{180 - (24 + 17 + 116)} = \frac{7}{3}x + 4x,\ x = 5.$$

$$\text{II.}\quad \frac{21600}{202\frac{1}{2}} = \frac{7}{3}x + \frac{7}{4} \cdot 4x + 12x,\ x = 5.$$

Saaledes kan i sidste Tilfælde haves 5 Heste, 20 Køer 60 Faar.

Regneopgave Nr. 3.

(2 Timer.)

(For Lærere)

En Fabrik paatager sig en Levering af Blykugler af 1,6 Centimeters Diameter. Kuglerne skulle leveres pakkede i 1000 cylindriske Daaser med 1200 Kugler i hver. I en cylindrisk Beholder kan der til enhver Kugle regnes et Mellemrum, hvis Volumen er $\frac{1}{6}$ af en Tærning med Kuglens Radius til Side.

I. Naar Daasernes Højde skal være lig Radius i Grundfladen, hvor stor maa da denne Radius tages?

Kuglerne skulle støbes af en Legering af 9 Vægtdele Bly og 1 Vægtdel Antimon; denne Legerings Vægtfylde er 11,115. Til Fremstilling af Legeringen kjøber Fabriken rent Bly i prismatiske Blokke, 37,4 Centimeter lange, 9,4 Cm. brede og 6,1 Cm. tykke; Vægtfylden er 11,35. Antimonet faas i Blokke paa 27,464 Kilograms Vægt.

II. Naar Metallerne ved Støbningen svinde 7 pCt., hvor mange Blokke af hver Slags maa Fabriken da kjøbe?

$$\pi = 3{,}1416.$$

1 Kilogram = 1000 Gram. 1 Kubikcentimeter Vand vejer 1 Gram.

Besvarelse. Hver Daases Rumfang er $\frac{4 \cdot 0{,}8^3 \pi}{3} \cdot 1200 + \frac{0{,}8^3}{6} \cdot 1200 = 2573{,}6 + 102{,}4 = 2676$ Kubikcent., sættes dette lig med $r^3 \pi$, har man

$$r = \sqrt[3]{\frac{2676}{\pi}} = 9{,}4794 \text{ Centimeter.} \qquad \text{I.}$$

Alle Kuglerne veje $2573{,}6 \cdot 1000 \cdot 11{,}115 = 28605500$ Gram, hvoraf 25744950 Gr. Bly og 2860550 Gr. Antimon.

Der behøves

$$\frac{25744950 \cdot 100}{11{,}35 \cdot 37{,}4 \cdot 9{,}6 \cdot 6{,}1 \cdot 93} = 1113{,}6 \text{ Blokke Bly}$$

og

$$\frac{2860550 \cdot 100}{27464 \cdot 93} = 112 \text{ Blokke Antimon}$$

Geometrisk Tegning.

(For Lærere)

Med en Radius lig en Femtedel af Tegnepapirets Brede tegnes midt paa Papiret og med tynd Linie en Cirkel, hvis Omkreds deles i 30 lige store Dele, der nummeres i Rækkefølge. Inden i denne Cirkel tegnes, forbindende hver to diametralt modsatte Delingspunkter, 2 kraftig trukne Cirkelbuer med Centrer paa den første Cirkelperiferi. Med hvert af den første Cirkels Delingspunkter som Centrum og rørende denne første Cirkel tegnes en punkteret Cirkelbue paa 90^0, maalt fra Røringspunktet og til den Side, hvor Tallene voxe.

Regneopgave Nr. 2.

(2 Timer.)

(For Lærerinder)

En Mur opføres af Mursten, hvoraf hver med tilhørende Fuger er 9 Tommer lang, $4\frac{1}{2}$ Tomme bred og $2\frac{1}{4}$ Tomme tyk. Muren skal være $15\frac{3}{4}$ Alen lang, $4\frac{1}{3}$ Alen høj, og dens Tykkelse skal være lig 3 Stens Brede.

I. Naar under Arbejdet en Del Sten gaa itu og derved blive ubrugelige, og man beregner at skulle kjøbe 7000 Sten, hvor mange pCt. af disse antages da at ville gaa til Spilde?

II. Hvad koste disse 7000 Sten, naar et Parti af dem er til 28 Kr., et andet Parti, 3 Gange saa stort, er til 22 Kr., og Resten, der udgjør $16\frac{2}{3}$ pCt. af de 2 første Partier tilsammen, er til 19 Kr., alt pr. 1000.

III. Hvis Stenene derimod ere kjøbte for ialt 190 Kr. og i 3 Partier i paa 2500, 3000 og 1500 Stykker, og Priserne pr. 1000 ere for 2. Parti 10 pCt. højere end for første, og for 3. Parti 2 Kr. 50 Øre højere end for 2., til hvad Pris er da hvert Parti kjøbt?

Besvarelse. Der er brugt

$$\frac{15\frac{3}{4} \cdot 24 \cdot 4\frac{1}{3} \cdot 24 \cdot 4\frac{1}{2} \cdot 3}{9 \cdot 4\frac{1}{2} \cdot 2\frac{1}{4}} = 5824;$$

der er gaaet til Spilde

$$\frac{(7000 - 5824) \cdot 100}{7000} = 16{,}8 \text{ p. C.} \qquad \text{I.}$$

Er der x Sten i det første Parti, bliver

$$x + 3x + 4x \cdot \frac{16\frac{2}{3}}{100} = 7000, \text{ eller } x = 1500.$$

De to andre Partier ere da 4500 og 1000; Prisen

$$28 \cdot 1{,}5 + 22 \cdot 4{,}5 + 19 = 160 \text{ Kr.} \qquad \text{II.}$$

1000 Sten af første Parti koster

$$\frac{190 - 2{,}50 \cdot 1{,}5}{2{,}5 + 4{,}5 \cdot \frac{110}{100}} = 25 \text{ Kr.},$$

andet Parti $27\frac{1}{2}$ Kr. og tredje 30 Kr. III.

Ekstraprøve for Lærerinder.

(3 Timer.)

A. kjøber 2 Partier Byg, det ene paa 46 Tdr. 5 Skpr. $1\frac{1}{3}$ Fdk. til en Pris af 12 Kr. $77\frac{1}{7}$ Øre Tønden, det andet til 12 Kr. 12 Øre Tønden. Efter at Kornet er renset, hvorved det svinder 5 pCt., lader han det male til Gryn og faar da $5\frac{1}{2}$ Skp. Gryn af 1 Tønde Byg. Begge Partier give i Alt 52 Tdr. 2 Skpr. Gryn, som han sælger til 30 Kr. $52\frac{8}{11}$ Øre Tønden, og efter at han har betalt for Kornets Maling, har han i ren Fortjeneste $45\frac{2}{3}$ pCt. af hele sin Udgift. Der spørges: I. Af hvor mange Tønder bestod det andet Parti Byg? II. Hvad kostede Malingen af hver Tønde Byg?

Besvarelse. I alt er købt $\frac{418}{5\frac{1}{2}} \cdot \frac{100}{95} = 80$ Tdr.; det andet Parti Byg er saaledes 33 Tdr. 2 Skp. $2\frac{2}{3}$ Fdk. I.

Kornet har kostet $1277\frac{1}{7} \cdot 46\frac{2}{3} + 1212 \cdot 33\frac{1}{3} = 100000$ Øre

Malingen har kostet $3052\frac{8}{11} \cdot 52\frac{1}{4} \cdot \frac{100}{146\frac{2}{3}} - 100000 = 9500$ Øre, eller for hver Tønde $9500 : \frac{80 \cdot 95}{100} = 125$ Øre. II.

Almindelig Forberedelseseksamen.

(Oktober 1893.)

Aritmetik.

1. Find x af Proportionen

$$\frac{1 - \sqrt{2} + x}{1 + \sqrt{2} - x} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}.$$

2. Find to paa hinanden følgende Kubiktal, hvis Differens er 3003001.

3. I en Differensrække, der bestaar af 9 Led, er Summen af de tre første Led 1 og Summen af de tre sidste Led 13. Find Summen af de tre mellemste Led.

Opløsning: 1. Ved at bringe Ligningen paa hel Form og reducere, faar man

$$x = \frac{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{6}}{\sqrt{6} + 2 + \sqrt{2}} = \sqrt{3}.$$

2. Kaldes Tallene x^3 og $(x - 1)^3$ haves

$$x^3 - (x - 1)^3 = 3003001 = 3x^2 - 3x + 1,$$

hvoraf

$$x = \begin{cases} 1001 \\ -1000. \end{cases}$$

De søgte Tal ere da 1001^3 og 1000^3.

3. Betegnes Rækkens Led

$$x - 4y, x - 3y, x - 2y, x - y,$$
$$x, x + y, x + 2y, x + 3y, x + 4y,$$

er det givet, at $3x - 9y = 1$

og at $3x + 9y = 13,$

medens $3x$ er søgt.

Af de to givne Ligninger faas ved Addition

$$6x = 14, \text{ altsaa } 3x = 7.$$

Geometri.

1. Vis, at en Vinkels Halveringslinie er det geometriske Centrerne i de Cirkler, som afskære lige store Korder ns Ben.

Tegn en Cirkel med given Radius, som rører den ene Side i en given Trekant og afskærer lige store Korder af de to andre Sider.

2. AB og AC ere to Korder i samme Cirkel, D er Skæringspunktet mellem Forlængelsen af Linien BC og Tangenten til Cirklen i A. Idet $\angle$ BAC er lig med $\angle$ BDA, skal det bevises, at den største af Korderne er Diameter i Cirklen.

Hvor stort er Cirklens Areal, dersom AD er 5 Tommer lang, og den mindste af Korderne 4 Tommer?

Opløsning: 1. a) Da Centrum for en Cirkel, der afskærer lige store Korder af to Linier, har samme Afstand fra de to Linier, og omvendt, bliver det geometriske Sted for de paagældende Centrer det samme som for Punkter, der have samme Afstand fra Vinklens Ben, altsaa Vinklens Halveringslinie.

b) Den søgte Cirkels Centrum er Skæringspunktet mellem en Linie parallel med den Side, AB, der skal berøres, i Radiens Afstand, og Halveringslinien af Vinklen C mellem de to andre Sider. For at Opgaven skal være mulig, maa den givne Radius være større end Radius i Trekantens indskrevne Cirkel, og for at de afskaarne Korder skulle være Dele af selve Siderne, maa Radius have en begrænset Størrelse. *)

Hvis de afskaarne Korder delvis eller helt maa falde paa Sidernes Forlængelser, kan Centrum ogsaa være beliggende paa en Linie $\neq$ AB i Radiens Afstand, men til modsat Side af C: Opgaven vil da faa 2 Løsninger, hvis den givne Radius $> r_c$ (sædv. Betydning); 1 Løsning, hvis den g. R. ligger mellem r og r_c; men det maa da ogsaa betragtes som tilladeligt, at Røringspunktet kan falde paa AB's Forlængelse.

*) Grænserne for det søgte Centrums Beliggenhed paa Halveringslinien CD er paa den ene Side den indskrevne Cirkels Centrum, paa den anden Side enten CD's Skæringspunkt med den Linie, der halverer Vinklen mellem AB's Forlængelse og den paa CD i C vinkelrette Linie, eller (dog undtagelsesvis, og i hvert Fald kun, naar $\angle$ A er stump) CD's Skæringspunkt med den Linie, der er vinkelret paa AB i A [illegible] Diskussion ligger udenfor en »Præliminarists« Modenhedssfær[illegible] som Anmærkning til den egentlige Løsning ovenfor.

2. a) AB være den største Korde. Da

$$\triangle BAC \sim \triangle BDA$$

$$(\angle B \text{ fælles}, \angle A = \angle D)$$

er $\angle ACB = \angle DAB = 90^0$, hv. sk. bev.

b) Ved de bekendte Sætninger om den retv. Trekant faar man

$$DC = 3 \text{ T.}, \ BC = \frac{16}{3} \text{T.}, \ AB = \frac{20}{3} \text{T.},$$

derved Cirklens Areal $= \frac{\pi \cdot 400}{9}$ Kvt. $= 139{,}6$ Kvtommer.

Praktisk Regning.

1. En Købmand sælger et Parti Hvede, der vejer 36000 ℔ med en Fortjeneste af 225 Kr. 36 Øre.

Naar Tiendedelen sælges med et Tab af $8\frac{1}{3}$ p. C. for 5 Kr. 39 Øre pr. 100 ℔, hvor stor har da Indkøbsprisen været? Til hvilken Pris pr. 100 ℔ sælges Restpartiet, og hvor mange p. C. tjener han paa dette?

2. Messing er en Legering (Blanding) af 2 Vægtdele Kobber, 1 Vægtdel Zink og 0,06 Vægtdele Bly.

Hvor meget vejer 1 Kubikfod Messing, naar 1 Kubikfod af de nævnte Metaller vejer henholdsvis 553,66 ℔, 434 ℔ og 706,80 ℔? (Logaritmer anvendes).

Opløsning: 1.

Da $\frac{11}{12}$ af Indkpr. pr. Ctn. er $= 539$ Øre

bliver Indkpr. pr. Ctn. $= \frac{539 \text{ Øre}}{11} \cdot 12 = 588$ Øre.

Tab paa 36 Ctn. à 49 Øre	=	1764 Øre
		22536 »
Fortjeneste paa 324 Ctn. .	=	24300 Øre
» » 1 »	=	75 Øre.

Restpartiet sælges til 6 Kr. 63 Øre pr. Ctn. med

$\frac{7500}{588} =$ c. $12\frac{3}{4}$ p. C.'s Fortjeneste.

2. 2 ℔ Kob. + 1 ℔ Z. + 0,06 ℔ Bly = 3,06 ℔ Messing.

2 ℔ Kob. har Rumfanget $\frac{2}{553,66}$ Kub'.

1 ℔ Z. » » $\frac{1}{434}$ »

0,06 ℔ Bly » » $\frac{0,06}{706,80}$ »

Altsaa vil $\left(\frac{2}{553,66} + \frac{1}{434} + \frac{0,06}{706,80}\right)$ Kub'. Mess. veje 3,06 ℔, og følgelig vil

$$1 \text{ Kub'. Mess. veje } \frac{3,06 \text{ ℔}}{\frac{2}{553,66} + \frac{1}{434} + \frac{0,06}{706,80}} = 510 \text{ ℔}.$$

Atter „et geometrisk Sted".

Af Chr. Hansen.

Paa Foranledning af en for nylig udkommen 3dje Udgave af en Bog, hvis 1ste Udgave udkom i 1878, nemlig »geometriske Konstruktionsopgaver ordnede til Skolebrug af Krogh-Jensen« skal jeg tillade mig at repetere den i »elementær Plangeometri af Knud Christensen og Carl Schmidt« indeholdte Definition af Begrebet »geometrisk Sted«, der lyder saaledes:

> »et geometrisk Sted er en eller flere Linier, hvis Punkter alle opfylde en given Betingelse,«

samt to i officiel Skrivelse A (Tidsskrift for 1892, Side 2) og i Bemærkningerne til denne Skrivelse (Tidsskr. s. A., Side 42) indeholdte Udtalelser, denne Definition vedrørende, der lyde saaledes:

> »Definitionen er falsk; Stedet skal indeholde alle de Punkter o. s. v.«

og »Heldigvis blive Forfatterne i udelukkende Besiddelse af Fejlen«.

Den første af disse to Paastande er jo rigtig men halvfuldendt, eftersom Stedet som bekendt ikke maa indeholde andre end de Punkter o. s. v., hvorimod den sidste Paastand for saa vidt er urigtig, som Krogh-Jensen 13 Aar tidligere har publiceret den med den paaankede aldeles ækvivalente Definition, at

»et geometrisk Sted er en eller flere Linier, hvori alle Punkter opfylde en enkelt Betingelse og altsaa have en vis fælles Egenskab.«

Ophavsmanden til denne Definition har nu i 3dje Udgave af sine Konstruktionsopgaver taget sig den i den officielle Skrivelse A fremsatte Anke ad notam, men, som det synes, ikke lagt Mærke til, at denne Anke er halvfuldendt, og er derfor gaaet »fra Skylla til Karybdis« d. e. fra den Krogh Jensen-Christensen-Schmidtske Definition til den Steenske.

I Fortalen til 3dje Udgave af den nævnte Opgavesamling siges nemlig. »Noget, der plejer at falde Begynderen vanskeligt, er den rette Forstaaelse af det geometriske Sted, hvorfor der særlig er lagt an paa at gøre Betydningen af dette indlysende«, og saa allerede paa Bogens næste Blad siges, at

»et geometrisk Sted er en eller flere Linier, hvori findes alle de Punkter, der opfylde en enkelt Betingelse og altsaa have en vis fælles Egenskab«.

Ifølge denne Definition kan altsaa f. Eks. det geometriske Sted for et Punkt, der fra en given Cirkel har en Afstand lig Radius, være Indbegrebet af denne Cirkel multipliceret med 2 m. H. t. dens Centrum og en Uendelighed af vilkaarlige gennem dens Centrum gaaende Linier, eftersom jo i Cirklen og alle disse vilkaarlige Linier i Forening »findes alle de Punkter, der opfylde en enkelt Betingelse«. Og dette Eksempel er jo ingenlunde et enkelt specielt og enestaaende Bevis paa Definitionens Uvederhæftighed, eftersom denne Definition ved Hjælp af det valgte Eksempel let vil indses at forsyne ethvert hidtil kendt geometrisk Sted med en Uendelighed af aldeles vilkaarlige inier.

Mon det da virkelig kan siges, at denne Definition har faaet det til at ophøre med »at falde Begynderen vanskeligt« at komme til »den rigtige Forstaaelse af det geometriske Sted«. og at den »særlig er lagt an paa at gøre Betydningen af dette indlysende«? I det mindste maa jeg, der i en lang Aarrække med fortrinligt Udbytte har benyttet den nævnte efter min Mening ellers saa godt skrevne Bog, for mit Vedkommende tilstaa, at det har været mig en ikke ringe Skuffelse at finde i denne Bogs 3dje Udgave den allerede i 1ste Udgave fremsatte falske Definition af Begrebet »geometrisk Sted« afløst af en anden, der snarere er værre end bedre.

Efterskrift af Red. Vi ere enige med Hr. Rektor Hansen i at beklage, at den gode Samling af Konstruktionsopgaver, Hr. Krogh-Jensen har udgivet, skæmmes ved den saavel formelt som reelt mangelfulde Definition paa »geometrisk Sted«. Og hertil kommer yderligere, at medens Definitionen mangler sin ene Halvdel, saa mangler de specielle Beviser hver især netop den anden Halvdel ɔ: den, der svarer til den Del af Definitionen, der er medtaget. I Definitionen er nemlig præciseret, at Stedet skal indeholde alle de Punkter etc., men der mangler den Bestemmelse, at intet Punkt i Stedet maa undlade at opfylde Betingelsen. I Beviset derimod er der fundet, at ethvert Punkt i den eller den Linie opfylder Betingelsen, men ikke at intet Punkt udenfor den Linie kan opfylde Betingelsen — og uden at have paavist det, kan man ikke fastslaa Linien som geometrisk Sted for de paagældende Punkter.

Det er muligt, at Hr. Krogh-Jensen har haft mindre heldige Forbilleder at danne sin Bog efter, og at dette delvis kan tjene ham til Undskyldning. Men det er uheldigt for dem, der skal bruge Bogen — hvad enten de blindt hen følge den, og a' faa en mangelfuld Opfattelse af et Støttepunkt i Konstru'

theorien — eller de se Fejlene og- altsaa ere nødsagede til at rette dem og lade Eleverne rette dem. Dog er den sidste Ulempe mindre end den første — lad os haabe, at alle Lærere ville gøre sig den Ulejlighed at supplere de anførte Mangler — saa kan de iøvrigt have megen Fornøjelse af Samlingen.

Litteratur-Anmeldelse.

Archimedes, Tijdschrift voor lagere Wiskunde. Onder Redactie van A. J. M. Brogtrop, J. H. van Leeuwen en W. van Roekel. (D. Mijs. Tiel.)

Dette lille hollandske ganske elementære Tidskrift udgaar med 4 Hefter om Aaret til Abonnementspris 1,50 Gülden (= c. 2,25 Kr.). Det bringer smaa Artikler, ikke indeholdende noget væsentligt nyt, men dog maaske af Interesse for adskillige, som derved paa en nem og behagelig underholdende Maade kunne vedligeholde og opfriske deres matematiske Kundskaber. Endvidere Opgaver til Løsning, af blandet Beskaffenhed, dels ganske simple Beregningsopgaver (ogsaa Opgaver tagne fra trykte Samlinger), dels noget vanskeligere og interessantere, f. Eks. følgende: »Er et Tetraeder regelmæssigt, naar Højderne ere lige store?« — Endelig giver Tidsskriftet Svar paa indsendte Spørgsmaal. »Archimedes« har mange Medarbejdere, navnlige Opgaveløsere, hvortil maaske udsatte Belønninger (Bøger til Værdi 10 Gülden) for de to flittigste og dygtigste Opgaveløsere bidrage.

Arithmetische Aufgaben, herausgegeben von Dr. H. Lieber, Professor am Friedrich-Wilhelm-Realgymnasium in Stettin. und Dr. A. Köhler, Oberlehrer am do. do. do. (Pf. Berlin, Verlag von Leonhard Simion, 1894).

En meget righoldig, vel ordnet Samling Opgaver i det elementære Kursus. Navnlig mærkes Afsnittet: Ligninger af 1ste Grad, der med fortrinligt pædagogisk Blik ere ordnede saaledes, at de aritmetiske Grundregler kunne indøves umiddelbart ved dem.

Auflösungen zu den Arithmetischen Aufgaben, herausgegeben von Dr. H. Lieber, Professor etc. und Dr. A. Köhler, Oberlehrer etc. (Preis 1 Mark 50 Pf. Berlin, Verlag von Leonhard Simion, 1894.)

Indeholder ikke hvad vi forstaa ved »Opløsninger« af Opgaverne, men kun Resultaterne. For disses Paalidelighed borger Forfatternes meget ansete Navne.

Eksamensopgaver i Regning og geometrisk Tegning, givne ved Skolelærereksamen 1872—93 samt Resultater og Løsninger til Regneopgaverne ved J. Rasmussen, Seminarielærer. (København, Jul. Gjellerups Forlag, 1893.)

Løsningerne synes i det hele at være forstandige og lette at finde sig tilrette i for Regnere. Enkelte Ting have ved Gennemlæsningen stødt os f. Eks.: Naar A, B og C ere Navnene paa 3 Personer, hvis samtidige Arbejdsydelser forholde sig som $1 : \frac{6}{5} : \frac{16}{15}$, er det utilladeligt at lade $\frac{A}{1} = \frac{B}{\frac{6}{5}} = \frac{C}{\frac{16}{15}}$. Naar man kalder et Antal Potter z, kan man ikke faa z $= 551\frac{1}{4}$ Potter; naar man kalder en Kapital s, kan man ikke lade s være et ubenævnt Tal. Lignende mindre præcise Overgange fra benævnte til ubenævnte Tal o. omv. findes ved Længde- og Arealberegninger m. fl. Steder. Hvis Bogen skal tjene til Haandbog for vordende Lærere, maa den være absolut nøjagtig i alle Udtryk; imidlertid kan den jo let blive det i de følgende Oplag, som antagelig ville komme.

P. T.

Løst Opgave.

176. Gennem Centret O i den omskrevne Cirkel for Trekanten ABC trækkes en Linje parallel med AB til Skæring med AC i E, samt en Linje vinkelret paa AB, skærende en paa AC i A oprejst vinkelret Linje i F. Bevis, at EF er parallel med BC.

Opløsning: Linjerne OA og OC trækkes.

Man faar da $\angle AOC = 2B$

eller $\angle OAC = 90^0 - B$

altsaa $\angle FAO = \angle B$.

Om Firkanten AFOE kan der omskrives en Cirkel, da de modstaaende Vinkler ere Supplementvinkler. Derved komme $\angle FAO$ og $\angle FEO$ til at spænde over samme Bue; altsaa $\angle FAO = \angle FEO = \angle B$. Men $\angle EDC = B$, saa er

$$\angle FEO = \angle EDC$$

og følgelig $EF \neq BC$.

(Aage Villumsen.)

Opgaver til Løsning.

186. A og B ere to vilkaarlige positive Tal og m et helt positivt Tal; vis, at man altid har

$$(A + B)^m < 2^{m-1}(A^m + B^m).$$

187. Løs Ligningen *)

$$\text{arctg}\, x^2 + \text{arctg}\, x = \text{arctg}\, \frac{1}{3}$$

188. Løs Ligningen

$$(1 + x)^{\frac{1}{2}} + (1 - x)^{\frac{1}{2}} = 1$$

paa en saadan Maade, at Prøve er overflødig.

* …cus), hvis Tangens er x. F. Eks. arctg 1 … lighed $0 < \text{arctg}\, x < \pi$.

189. Hvad kan man slutte om en Trekant, hvis Vinkelfunktioner tilfredsstille Relationen

$$\operatorname{tg} B \sin^2 C = \operatorname{tg} C \sin^2 B.$$

190. At løse Ligningssystemet

$$(y - z)^2 + l^2 = 2l(y + z)$$
$$(z - x)^2 + m^2 = 2m(z + x)$$
$$(x - y)^2 + n^2 = 2n(x + y).$$

191. Bevis følgende Sætnings Rigtighed: Hvis a og b ere indbyrdes primiske Tal, kunne Tallene $(a + b)$ og $(a^2 - ab + b^2)$ ikke have anden fælles Faktor end Tallet 3.

192. Bevis følgende: Hvis Ligningerne

$$ax^2 + 2bx + c = 0, \quad cx^2 + 2bx + a = 0$$

have en fælles Rod, ere deres andre Rødder bestemte ved
$ac(a + c)(x^2 + 1) + 2b(c^2 + a^2)x = 0.$

193. Paa Siden CD af et Parallelogram ABCD vælger man et Punkt E saaledes, at $CE = \frac{1}{n} CD$. Diagonalen AC skærer BE i F. Bevis, at

$$\frac{ADEF}{n^2 + n - 1} = \frac{AFB}{n^2} = \frac{BFC}{n} = \frac{CFE}{1}.$$

(Efter Mathesis.)

Bøger tilsendte Redaktionen.

Die Äquivalenz der Naturkräfte und das Energiegesetz als Weltgesetz, von Dr. Hermann Scheffler. (Leipzig, Friedrich Foerster, 1893).

Unendliche Reihen. Elementare Theori der Maxima und Minima. Von Dr. H. Lieber und F. von Lühmann. (Berlin, Leonhard Simion, 1893.)

Anfangsgründe der Trigonometri, von Dr. H. Lieber und F. von Lühmann. (Berlin, Leonhard Simion, 1893.)

Svenske Eksamensopgaver.

Mogenhetsexamen.

(Höstterminen 1893.)

Algebraiska uppgifter.

1. Huru många grader, minuter o. s. v. innehåller centrivinkeln i den största af alla cirkelsektorer med samma omkrets?

Opløsning. Antages Buen i den paagældende Sektor at være $\frac{1}{n}$ af Periferien $2\pi r$, er det givet, at

$$2r + \frac{2\pi r}{n} = O.$$

hvoraf
$$r = \frac{n \cdot O}{2(n + \pi)}.$$

$$\text{Arealet} = \frac{\pi r^2}{n} = \frac{\pi \cdot n \cdot O^2}{4(n + \pi)^2}.$$

n skal da have den Værdi, der gør

$$\frac{n}{(n + \pi)^2}$$

saa stor som muligt. Paa sædvanlig Maade findes

$$n = \pi.$$

Centervinklens Gradeantal er da $\frac{360}{\pi}$. Udtrykt i Grader, Minutter og Sekunder bliver den

$$114^0\ 35'\ 30''.$$

2. Logaritmen för ett tal i det system, hvars bas är 2, är fyra enheter större än logaritmen för samma tal i det system, hvars bas är 3. Hvilket är talet?

Opløsning. Tallet $= 2^{x+4} = 3^x$.

Ved at danne en Tabel over Potenserne af 2 og 3, saaledes at man skriver 3^0 ud for 2^4, 3^1 ud for 2^5 o. s. v., ser man, at x ligger nær ved 7 (lidt mindre). Tallet bliver ca. 2000.

Ved at benytte en Logaritmetabel med 5-cifrede Mantisser faar man
$$x = 6{,}838$$
$$\text{Tallet} = 1830{,}5.$$

3. En vinkel i en parallelogram, omskrifven en cirkel med 3,7 meters radie, är $27^0\ 19'\ 43''$. Huru stor är parallelogrammens yta?

Opløsning. Parallelogrammet er en Rhombe. Kaldes dennes Side a Meter, er

$$\text{Arealet} = 2 \,.\, 3{,}7 \,.\, a \text{ Kvadratmeter.}$$

Nu er Diameteren Projektion af Siden, altsaa

$$a = \frac{7{,}4}{\sin 27^0\ 19'\ 43''}$$

og

$$\text{Arealet} = \frac{(7{,}4)^2}{\sin 27^0\ 19'\ 43''}$$

$$= 119{,}28 \text{ Kvadratmeter.}$$

4. Om A, B och C kunna tillsammans utföra ett arbeta på 9 dagar; A, B och D tillsammans på 10 dagar; A, C och D på 11 dagar; och B, C och D på 12 dagar; huru lång tid behöfva då alla fyra för att tillsammans utföra samma arbete?

Opløsning. Vi kalde det Antal Dage, hver Arbejder især vilde behøve til at udføre Arbejdet, henholdsvis x, y, z og u. Vi vide da ifølge Opgaven, at i 1 Dag kunne

A, B og C udføre $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{9}$ af Arbejdet.

A, B og D » $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{u} = \frac{1}{10}$ » »

A, C og D » $\frac{1}{x} + \frac{1}{z} + \frac{1}{u} = \frac{1}{11}$ » »

B, C og D » $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{u} = \frac{1}{12}$ » »

Ved Addition og Division med 3

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{u} = \frac{763}{3 \,.\, 9 \,.\, 10 \,.\, 11 \,.\, 2},$$

der angiver den Part af Arbejdet, de fire Mænd kunne udføre i 1 Dag. De ville altsaa til at fuldføre det behøve

$$\frac{3 \,.\, 9 \,.\, 10 \,.\, 11 \,.\, 2}{763} = \text{c. } 7\tfrac{7}{9} \text{ Dage.}$$

5. Ett tvåsiffrigt tal är gifvet; ombytes siffrornas ordning, och multipliceras det gifna talet med det nya, så blir produkten = 5092. Divideras åter det gifna talet med det nya, så blir kvoten = 1 och resten ett ensiffrigt tal. Hvilket är talet?

Opløsning. Da Differensen mellem de to Tal skal være eencifret, maa Cifrene i Tallene være to paa hinanden følgende. Da tilmed Kvadratroden af Tallenes Produkt ligger mellem 71 og 72, maa Tallene være 76 og 67, af hvilke det første er det søgte.

Man kunde naturligvis ogsaa løse Opgaven ved Anvendelse af Ligninger.

6. Två velocipedryttare A och B fara från M till N och tillbaka igen; de afresa samtidigt. På hemfärden mötes A af B, då han (A) redan tillryggalagt $\frac{1}{8}$ af återvägen; och han uppnår M $10\frac{1}{3}$ minut tidigare än B, hvilken, då A hunnit till M, ännu har 930 meter att tillryggalägga. Huru lång är vägen M N, och huru stora ryttarnes hastigheter?

Opløsning. A's Hastighed er dobbelt saa stor som B's. B tilbagelægger 930 Meter i $10\frac{1}{3}$ Minut, altsaa

B's Hastighed 90 Meter pr. Min.
og A's » 180 » » »
Afstanden M N = 930 Meter.

7. I ett vertikalplan befinner sig en fast cirkel, hvars radie är 1009 cm., och en rörlig cirkel, hvars radie är 945 cm. Vid rörelsens början befinner sig den senares centrum 50 cm. vertikalt öfver den förres. Om nu det rörliga centrum på hvarje sekund förflyttar sig 20 cm. i horisontal riktning och 1,8 cm. nedåt i vertikal riktning, så frågas, efter huru lång tid de båda cirklarne beröra hvarandra innantill.

Opløsning. Antages Berøringen at indtræffe efter t Sekunders Forløb, vil man have

$$64^2 = (50 - 1{,}8\ t)^2 + 400\ t^2.$$

hvoraf t findes; det ligger mellem 2 og 3, nærmest 2.

Geometriska uppgifter.

1. En punkt B är gifven på förlängningen af en cirkels diameter. Att på denna förlängning bestämma en punkt A så, att tangenten, som drages från A, blir lika stor med linien AB.

Opløsning. Kaldes B's Afstand fra Centrum a, A's ubekendte do. x, Radius r, skal

$$\sqrt{x^2 - r^2} = a - x,$$

hvoraf

$$x = \frac{1}{2}\left(a + \frac{r^2}{a}\right),$$

der let konstrueres.

2. Tre punkter äro gifna i ett plan. Drag genom en af dem en rät linie så, att skilnaden mellan de båda andra punkternas afstånd från denna linie blir af en uppgiven storlek!

Opløsning. Over de to andre Punkters (B og C) Forbindelseslinje som Diameter tegnes en Cirkel. Denne skæres med en anden Cirkel, tegnet med B som Centrum og den givne Forskel som Radius. Skæringspunkterne være D_1 og D_2. BD_1 og BD_2 drages og gennem det første Punkt (A) trækkes Linier vinkelrette paa disse. Disse Linier opfylde den stillede Betingelse, medmindre de skære henholdsvis BD_1 eller BD_2 imellem B og D_1 eller imellem B og D_2. Hvis dette er Tilfældet, bliver nemlig ikke Afstandenes Forskel, men deres Sum lig den givne Linie. (Man kan sige, at Opgaven ogsaa i dette Tilfælde er løst, naar man »vedtager at regne Afstandene med Fortegn«.)

3. Hvilken är orten för midtpunkten af alla de hyperbelkordor, som gå genom den reella axelns ändpunkt?

Opløsning. Tages Aksens Endepunkt i Hyperblen til Origo, Aksen til Abscisseakse, er Hyperblens Ligning

$$y^2 = px + qx^2, \qquad (1)$$

Kordens Ligning $y = \alpha x,$ (2)

Skæringspunkternes Abscisser

$$0 \text{ og } \frac{p}{\alpha^2 - q}.$$

Midtpunktets Abscisse

$$x = \frac{p}{2(\alpha^2 - q)}. \qquad (3)$$

Ligningen for det geometriske Sted faas ved at eliminere α mellem (2) og (3); man faar (idet intet Hensyn tages til Faktoren x) $y^2 = \frac{p}{2} x + qx^2,$

en Hyperbel, ligedannet med den givne.

4. På sidan AB af triangeln ABC skall en punkt P tagas så, att om den sammanbindes med C, och om parallelt med BC drages PQ, som skär AC i Q, så blifva trianglarne APQ och BCP lika stora.

Opløsning. Kaldes Højderne fra Q og fra C i de to Trekanter, der skulle være ligestore, h og H, haves ifl. Opg.

$$\frac{h}{H} = \frac{PB}{AP} = \frac{AQ}{AC} = \frac{AP}{AB}.$$

P højdeler altsaa AB.

5. En parabel är uppritad, dess ekvation ej gifven. Konstruera dess brännpunkt och styrlinie.

Opløsning. Diameteren for et Kordesystem bestemmes ved to parallele Korder. Dernæst bestemmes Diameteren for et andet Kordesystem, der med Diameterretningen danner en Vinkel, der er Supplement til de to førstes Vinkel dermed. De to Diameteres Midterlinje er Aksen, dennes Skæringspunkt med Parablen Toppunktet O. Nu konstrueres let en Tangent ($OT = -\xi$), Halveringslinjen af dennes Vinkel med Diameteren skærer Aksen i Brændpunktet F. $OL = -OF$ bestemmer Ledelinjen.

6. Att från en vinkelspets i en triangel draga en rät linie till den motstående basen så, att den dragna linien blir medelproportional mellan basens delar.

Opløsning. Lad Linjen dragen gennem Vinkelspidsen B skære AC i D, den omskrevne Cirkel i E. Da er

$$BD \cdot DE = AD \cdot DC$$

og ifl. Opg. $$BD^2 = AD \cdot DD,$$

altsaa $$BD = DE.$$

Punktet E kan bestemmes saaledes: BA forlænges til A_1, idet $AA_1 = BA$; gennem A_1 trækkes en Linje $\neq$ AC; denne skærer den omskrevne Cirkel i E. Opgaven kan faa 2 Løsninger; den er kun mulig, naar Højden fra B paa AC ikke er større end »Pilen« for Buen AC (den, der ikke indeholder B).

7. Konstruera en fyrhörning, då man känner längderna af dess sidor samt längden af den räta linie, som sammanbinder midtpunkterna af två motstående sidor.

Opløsning. Firkanten være ABCD, AB's Midtpunkt E og CD's Midtpunkt F. Trækkes $EC_1 \neq BC$, $CC_1 \neq BE$, $ED_1 \neq AD$, $DD_1 \neq AE$, samt C_1D_1, fremkommer en Trekant EC_1D_1, hvori EF bliver Median. Denne Trekant tages til Basis for Konstruktionen, der da let udføres.

Uppgifter af mekaniskt och fysikaliskt innehåll.

1. En homogen och jämntjock skifva i form af en triangel skall i vågrät ställning uppbäras af fyra personer och det så, att bördan blir lika fördelad mellan dem. Två af dem skola fatta tag vid hvar sitt hörn och de båda öfriga vid hvar sin af två andra, på skifvans omkrets belägna punkter. Angif läget af dessa båda punkter.

Opløsning. Kaldes den materielle Trekant ABC, dens Vægt P, og skal den være understøttet i A, C, D paa AB og E paa BC, haves ved Anvendelse af Momentsætningen

$$P \cdot \frac{BC}{3} = \frac{P}{4} \cdot BC + \frac{P}{4} \cdot BE,$$

hvoraf $$BE = \frac{BC}{3},$$

ligeledes $$BD = \frac{BA}{3}.$$

Man kan komme til samme Resultat ved at fordele Byrden P virkende i O med $\frac{P}{2}$ i AC's Midtpunkt og $\frac{P}{2}$ i BO's Midtp., og atter fordele hver af disse Kræfter $\frac{P}{2}$, den første med $\frac{P}{4}$ i A og C, den anden med $\frac{P}{4}$ i de to Punkter, hvori en Linie gennem BO's Midtpunkt $\neq$ AC skærer BA og BC.

2. En 2,4 kg tung kropp, som befinner sig på ett glatt, vågrätt plan, åverkas af två till storlek och riktning oföranderliga krafter, hvilka sätta kroppen i gång och föra den i en riktning, vinkelrätt mot den ena kraftens. Storleken af denna kraft är 0,7 kg. Bestäm den andra kraftens storlek och riktning, då kroppen på första halfsekunden går 86 cm. Accelerationen vid fritt fall är 9,8 m.

Opløsning. Den resulterende Kraft er konstant i Størrelse og Retning, og der meddeles ikke Partiklen nogen Begyndelseshastighed; Bevægelsen bliver da retliniet og jævnt voksende. Accelerationen bestemmes af

$$\frac{1}{2} a \cdot \frac{1}{4} = 86^{\text{cm.}},$$

hvoraf $$a = 6{,}88^{\text{m.}}.$$

Den resulterende Krafts Størrelse $= \frac{2{,}4 \text{ kg.}}{9{,}8} \cdot 6{,}88$

$= 1{,}685$ kg.

Kaldes den anden Krafts Størrelse x kg., dens Vinkel med den første Kraft φ, faar man

$$x = \sqrt{0{,}7^2 + 1{,}685^2} = 1{,}82$$

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{1{,}685}{0{,}7}, \quad \varphi = 112^0, 56.$$

3. Af två slutna kärl A och B innehåller det förra luft, det senare vätgas. I kärlet A, som rymmer 12,8 liter, är, i kvicksilfverpelare räknadt, trycket 39 cm., i B 83 cm. Om kärlen förenas med en rörledning, så at gaserne få blanda sig, blir i båda kärlen gasernas sammanlagda tryck 55 cm. Huru stor rymd har B, då rörledningens rymd kan lemnas utan afseende?

Opløsning. Kaldes Rumfanget af B for x^{liter}, haves

$$12{,}8 \,.\, 39 + 83x = 55\,(12{,}8 + x),$$

hvoraf

$$x = 7{,}3.$$

4. I en ljudande öppen läppipa inskjuter man långsamt från den öppna ändan en kolf, som sluter tätt till. För två olika lägen af kolfven, mellan hvilka afståndet är 33,2 cm, inträffar då, att en närstående, med resonanslåda försedd stämgaffel, hvars ton är tvåstrukna c, på grund af medsvängning börjar ljuda. Försöket anställes vid en temperatur af 24°. Beräkna häraf våglängden för den nämda tonen i luft af 10°, då man kan antaga, att ljudets fortplantningshastighet i luft för hvarje grads temperaturhöjning ökas med 59 cm. Ettstrukna a svarar mot 435 hela svängningar i sekunden.

Opløsning. Kaldes den søgte Lydhastighed c^{m}, haves

$$c = (2 \,.\, 33{,}2 \,.\, \frac{3 \cdot 435}{5} \,.\, 2 - 59 \,.\, 14) : 100,$$

hvoraf

$$c = 338{,}3.$$

5. En kropp väges fullständigt nedsänkt i vatten och lider dervid en vigtförlust af 123,64 gr. då temperaturen är 4°. Är åter temperaturen 58,8°, blir vigtförlusten 122,07 gr. Beräkna häraf kroppens längdutvidgningskoefficient, då man vet, att 1 kbcm. 4-gradigt vatten vid 58,8° antar en rymd af 1,0163 kbcm.

Opløsning. Kaldes Længdeudvidelseskoefficienten α, haves

$$122{,}07 \,.\, 1{,}0163 = 123{,}64\,(1 + 3\alpha \,.\, 54{,}8),$$

hvoraf

$$\alpha = 0{,}00002.$$

6. Mot ytan af en kula af glas faller en ljusstråle under en infallsvinkel af $67°,5$, brytes, reflekteras två gånger ini kulan, samt brytes åter vid utgåendet ur densamma. Huru stor är glasets brytningsexponent, då den afgående strålen med den infallande bildar en rät vinkel?

Opløsning. Til Bestemmelse af Brydningsvinkelen b haves Ligningen

$$90^0 + 2.(180^0 - 67^0,5) + 6b = 6.90^0,$$

der giver $b = 37^0,5.$

Brydningsforholdet $n = \frac{\sin 67^0,5}{\sin 37^0,5} = 1,518.$

7. Polerna af en dynamomaskin, hvars elektromotoriska kraft är 186 volt och inre motstånd 0,5 ohm, skola förenas med 10 ledningar, hvar och en innehållande 4 lika glödlampor, ordnade efter hvarandra, strömstyrkan i hvar och en af ledningarna skall då bli 1,2 ampère. Huru stort är motståndet i hvarje lampa? Motståndet i de ledningstrådar, som förena lamporna, kan lemnas utan afseende.

Opløsning. Kaldes Modstanden af hver Lampe x^{ohm}

haves $12 = \frac{186}{0,5 + 0,4 \, . \, x}$,

hvoraf $x = 37,5.$

Om en Sætning af Fermat.

(Af A. S. Bang.)

Der findes næppe nogen mathematisk Sætning, som har givet Anledning til saa mange mislykkede Beviser, som Fermats berømte Sætning, at Ligningen

$$x^n + y^n = z^n,$$

hvor n er et helt Tal større end 2, ikke er opløselig

i rationale Værdier for x, y og z, naar undtages Løsningen $x = z = 1$, $y = 0$.

Da Fermat angiver at være i Besiddelse af et almindeligt Bevis, uden at han dog har offentliggjort noget saadant, har senere Mathematikere ganske naturligt bestræbt sig for at bevise Sætningen.

For $n = 4$ er Problemet løst af Fermat selv, for $n = 3$ af Euler, for $n = 5$ omtrent samtidigt af Legendre og Lejeune-Dirichlet, hvilken sidste ogsaa har behandlet Tilfældet $n = 14$, og endelig har Kummer ved Anvendelse af sin Theori om komplexe hele Tal, dannede af Enhedsrødder, løst det almindelige Problem, naar undtages for forskjellige specielle Værdier af n, som har unddraget sig hans Methode.

Intet af disse Beviser egner sig for et elementært Tidsskrift, og de mange simple »Beviser« for Sætningen i sin Almindelighed eller for specielle Værdier af n, som fra Tid til anden dukke op i Tidsskrifter — ja endog i videnskabelige Selskabers Skrifter — ere i Reglen værdiløse.

Som Exempler herpaa skal jeg nævne 2 af de nyeste »Beviser«, som begge findes i Hoffmanns: Zeitschrift für math. u. naturw. Unterricht.

Det første gjælder Fermats Sætning for $n = 3$

$$x^3 + y^3 = z^3,$$

og findes i 23 Aarg. (1892) Pag. 268 Opgave 1077.

Den stillede Opgave var imidlertid kun at bevise, at Ligningen ikke er opløselig i hele Tal, for hvilke $z < 100000000$, og den maa i denne Skikkelse anses for at være ret passende, men Opgaveløseren giver sig i Lag med selve den Fermatske Sætning.

Han reducerer Opgaven til Bestemmelse af hele Værdier af n og z i Ligningen:

$$z^3 = 3n^2 \div 3n + 1,$$

og paastaar – uden at bevise det — at denne Ligning kun er oploselig for $n = 0$ eller $n = -1$. Dette kræver dog et Bevis, som næppe er saa let at føre.

I 24 Aarg. (1893) Pag. 272 betragtes dernæst Ligningen

$$x^5 + y^5 = z^5,$$

som paa en ret interessant Maade reduceres til

$$4q^5 + p^5 = \frac{5p^5 b^2}{a^2},$$

hvor p og q ere indbyrdes primiske hele Tal, og a og b ligeledes indbyrdes primiske.

Her er da $a = 5r$, men nu slutter Forfatteren, at $p = 5nr$; dette Ræsonnement er fejlt, da p^5 godt kan være deleligt med r^2, uden at p er delelig med r.

En aldeles analog Fejlslutning findes i Hr. cand. mag. Nielsens: Opgaver i ren Mathematik (1892), hvori han henviser til følgende unøjagtige Sætning i Opgave 115:

Naar $2 . r^p + 1 = s^p,$

hvor p er et Primtal, maa man have

$$s = 2 . t^p + 1.$$

Ved Beviset derfor gjør han den Slutning, at naar q gaar op i r^p og ikke er delelig med nogen p'te Potens, maa r være delelig med q.

Sætningen skal lyde saaledes:

Naar p er et Primtal, faar man enten

$$s = 2 . t^p + 1 \quad \text{eller} \quad s = 2 . p^{p-1} . t^p + 1,$$

eftersom r er delelig med p eller ej.

I Opgaverne 117 og 118 betragter han dernæst Ligningen

$$a^p + b^p = c^p,$$

hvor p er et ulige Primtal, og angiver Sætningerne:

$$c - a = \alpha^p \quad \text{eller} \quad c - a = p . \alpha^p.$$
$$a + b = \gamma^p \quad \text{eller} \quad a + b = p . \gamma^p,$$

som maa rettes til:

$$c - a = \alpha^p \quad \text{eller} \quad c - a = p^{p-1} . \alpha^p,$$
$$a + b = \gamma^p \quad \text{eller} \quad a + b = p^{p-1} . \gamma^p.$$

Disse Korrektioner, som vise, hvilke Farer man paa dette Omraade er udsat for, have formentlig Interesse for de af Tidsskriftets Læsere, som benytte Opgave-Samlinge·

Om Definitionen paa Multiplikation med en Brøk.

(Af P. T. Foldberg.)

Et af de allervanskeligste Punkter i den elementære Arithmetik i pædagogisk Henseende er Indførelsen af den brudne Multiplikator. Ikke fordi Reglen er vanskelig at lære og anvende, men fordi selve den komplicerede Operation (det er den første Dobbelt-Operation, der læres om) er uklar for Elevens Forestilling, og ikke bliver mindre uklar ved den Fremstilling, der gives deraf i Lærebøgerne.

Jeg har liggende for mig et lille Udvalg af Lærebøger, dels saadanne der i den nærmest foregaaende Tid have været brugte (og som paa flere væsentlige Punkter øjensynligt have været Forbilleder for nogle af de nuværende), og dels saadanne, der nu bruges i Skolerne — og skal her anføre de Maader og de Ord, hvorpaa og hvormed disse indføre den brudne Multiplikator.

Steen, elementær Arithmetik (3die Udgave, 1853):

Da $7 \cdot \frac{3}{7} = 3$, maa man ved at sætte et Tal $\frac{3}{7}$ Gange som Addend faa det, der multipliceret med 7 frembringer Tallet sat 3 Gange som Addend. Men det Tal, som multipliceret med 7 frembringer det tredobbelte af det givne, findes ved at multiplicere det givne med 3 og dividere det udkomne med 7. Multiplikation med $\frac{3}{7}$ er derfor det samme som Multiplikation med 3 og Division med 7. Overhovedet vil man ved at sætte et Tal et bruddent Antal Gange som Addend erholde det Tal, som multipliceret med Nævneren frembringer det givne Tal sat saa ofte som Addend, som Tælleren angiver. Multiplikation med Brøk sker da ved Multiplikation med Tælleren og Division med Nævneren.

Assens, Arithmetikkens Begyndelsesgrunde (3. Opl., 1873):

(§ 53.) Da $7 \cdot \frac{3}{8} = 7 \cdot 3 \cdot \frac{1}{8} = 21 \cdot \frac{1}{8} = \frac{21}{8}$, indses, at

en Brøk multipliceres med et helt Tal, naar Tælleren multipliceres med Tallet . . .

(§ 54.) Da $\frac{7 \cdot 3}{8}$ ogsaa er lig $\frac{7}{8} \cdot 3$, indses ved at læse Ligningen omvendt, nemlig $\frac{7}{8} \cdot 3 = \frac{7 \cdot 3}{8}$, at et helt Tal multipliceres med en Brøk ved at multiplicere det med Tælleren og dividere det udkomne med Nævneren. Rigtigheden heraf er ogsaa indlysende, naar man erindrer, at et Tal bliver uforandret ved at multipliceres og divideres med samme Tal; ifølge heraf er

$$\frac{7}{8} \cdot 3 = \frac{8 \cdot \frac{7}{8} \cdot 3}{8} = \frac{7 \cdot 3}{8}.$$

Petersen, Aritmetik og Algebra I (6te Udg., 1892):

Man tør dog kun bruge de her beviste Sætninger saaledes, at man ikke ved at sætte en Parentes faar en brudden Divisor eller Multiplikator, da en saadan, efter vore Definitioner, ikke har nogen Betydning. Det ligger da nær, at man for at undgaa denne Indskrænkning, vedtager, at man ved Multiplikation med en Brøk vil forstaa Multiplikation med Tælleren og Division med Nævneren; derved kommer det hidtil (naar c ikke gaar op i b) meningsløse Udtryk $a . (b : c)$ til at betegne det samme som $a . b : c$, saa at Parentesen ogsaa i dette Tilfælde kan sættes.

Christensen og Schmidt, Elementær Arithmetik og Algebra I. (1891):

(§ 18.) For . . . at kunne opretholde den Regel for Ombytningen af Multiplikator og Multiplikand, der er bevist at gælde for Eks. 1 (ɔ: for hele Tal), vedtager man, at . . . $\frac{a}{b} . n$ skal betyde $\frac{an}{b}$ ɔ: (§ 31) man multiplicerer med en Brøk ved at multiplicere med dens Tæller og dividere det udkomne Produkt med dens Nævner.

Krogh-Jensen, Arithmetik med særligt Hensyn til praktisk Regning (1890):

(§ 33.) Et Tal multipliceres med en Brøkenhed ved at divideres med dens Nævner.

Produktet $16 . \frac{1}{8}$ betegner egentlig, at 16 skal sættes $\frac{1}{8}$ Gange som Addend. Betydningen heraf kan ifølge Enhedens Oprindelse kun være, at Produktet skal indeholde 8 Gange færre Enheder end 16 sat 1 Gang som Addend. Altsaa faas $16 . \frac{1}{8} = \frac{16 . 1}{8} = 2$; $a . \frac{1}{b} = \frac{a . 1}{b} = \frac{a}{b}$.

Man faar $a . \frac{1}{b} = \frac{a}{b} = \frac{1}{b} . a$, saa at Faktorernes Orden ogsaa her er ligegyldig.

(§ 45.) Man multiplicerer med en Brøk ved at multiplicere med Tælleren og dividere med Nævneren.

$$5 . \frac{3}{7} = 5 . 3 . \frac{1}{7} = 15 . \frac{1}{7} = \frac{15}{7} \ldots$$

Man multiplicerer med Brøkens Tæller og med dens Enhed, hvilket sker ved at dividere med Nævneren.

Anm. Sætningens Rigtighed kan ogsaa indses ved følgende Betragtning. Multiplikatoren $\frac{3}{7}$ er 7 Gange mindre end 3. Multiplicerer man 5 med 3, maa Produktet blive 7 Gange for stort, hvorfor man tillige maa dividere med 7 for at faa det rigtige Resultat.

Baden & Johnsen, Lærebog i Regning for Handels- og Realskoler (1893): (§ 7.) En Brøk bliver større, naar enten dens Tæller vokser eller dens Nævner aftager, idet derved enten det Antal Enheder, som Brøken indeholder, eller selve den brudne Enhed, hvormed Brøken er maalt, vil blive større. (Eks.)

En Brøk bliver mindre, naar enten dens Tæller aftager eller dens Nævner vokser . . . . .

(§ 8.) En Brøk multipliceres med et helt Tal (eller omvendt et helt Tal med en Brøk), naar Tælleren multipliceres med

det hele Tal, og Nævneren lades uforandret, eller naar Nævneren divideres med det hele Tal, og Tælleren lades uforandret.

I begge Tilfælde bliver Brøken ifølge § 7 lige saa mange Gange større, som Tallet angiver . . . . .

To Brøker multipliceres med hinanden ved, at Tæller multipliceres med Tæller og Nævner med Nævner.

F. Eks. $\frac{7}{8} \cdot \frac{3}{5} = \frac{7 \cdot 3}{8 \cdot 5} = \frac{21}{40}.$

Multiplicerer man $\frac{7}{8}$ med 3, faar man $7 \cdot \frac{3}{8}$; man skal imidlertid multiplicere med $\frac{3}{5}$, der er fem Gange mindre, og maa derfor gøre Resultatet $\left(\frac{7 \cdot 3}{8}\right)$ fem Gange mindre, hvilket ifølge § 7 sker ved at gjøre Nævneren fem Gange større . . . .

Disse udførlige Citater vise, hvor pædagogisk uheldig Fremstillingen af den brudte Multiplikators Betydning i Aritmetiken gennemgaaende er. Det maa erindres, at her er en dobbelt Vanskelighed for Eleven, nemlig [1]) den for ham noget besynderlige Sætning, at Multiplikation.. er Multiplikation.. og Division.. Baden & Johnsen have ikke denne Forklaring — de have ganske simpelt ingen, hvilket er en let, men pædagogisk set mindre heldig Maade at overvinde Vanskeligheden paa. [2]) Motiveringen. Petersens er logisk set uangribelig. Man maa imidlertid erindre, at Prof. P. kalder sin Lærebog Aritmetik og Algebra, og tænker sig den anvendt — ikke blot som Lærekursus i Algebra i Gymnasiet — men ogsaa som Lærebog i Aritmetik paa Undervisningens første Trin, hvorved den jo virkelig ogsaa har faaet en meget udstrakt Anvendelse. Jeg betvivler dog, at Elever, der ikke i Forvejen kunde operere med Brøk efter mekanisk tillærte Regler, vilde opnaa stort mere ved at bruge denne Bog, som den er. De lære Reglerne, egentlig ikke mere — den logiske Underbygning maa de naturligt staa ganske blinde for (vel paa ganske enkelte nær, der skimte d
ved en omhyggelig forberedende Undervisning i Aritme

et pædagogisk sundt Grundlag kunde de naa langt videre frem, og da, naar den rette Tid kom, have Glæde og Nytte af at bruge Prof. P.'s til det andet Undervisningstrin vel egnede Bog.

Christensen og Schmidts er næppe holdbar. Den er ganske overfladisk, kommer slet ikke til at oplyse Sagens egentlige Kærne for Eleven.

Steen er maaske den, der trænger dybest ind. Han fastholder den oprindelige Definition paa Multiplikation, modificeret ved Brøkbegrebet. Udtrykket i Fremstillingen er vel noget dunkelt, men der er næppe Tvivl om, at her har været det rette Blik i pædagogisk Henseende — om end det kan se ud, som om der er leveret et falsk Bevis.

Absolut falske Beviser ere leverede af Assens (hele to) og af Krogh-Jensen, hvis uklare og noget forvirrede Fremstilling umulig kan give Eleverne den rette Respekt for aritmetisk Stringens.

Baden & Johnsens Fremstilling synes nærmest at falde sammen med Assens'.

Endelig maa man undre sig over, at ingen af de nævnte aritmetiske Lærebøger, end ikke dem, der særligt »tage Hensyn til praktisk Regning«, udtale sig angaaende »Reguladetrireglens« Gyldighed for brudne Tal. —

I Aritmetiken, opfattet som Læren om de bestemte Tal, Ciffertallene (og maaske Grundoperationerne med Bogstavtal, men uden at tillægge disse den almindelige Betydning som Algebraen), har man egentlig aldeles ikke Brug for en brudden Multiplikator. Det maa staa klart for enhver, der har den rette Forstaaelse af, hvad hele og brudne Tal egentlig er, at enhver konkret Opgave, der nu løses ved Anvendelse af »Multiplikationer og Divisioner med Brøk,« lige saa vel kan løses uden at indføre disse Betegnelser for de udførte Regneoperationer. Men da man nu engang har indført dem, og da Indførelsen af dem har en vis Betydning, gælder det om at faa slaaet saadanne Definitioner fast, der holde sig saa nær til Sagens egentlige Kærne som

muligt, og ere let tilgængelige for Elevernes store Gros. Jeg synes da, at Fremstillingen af brudden Multiplikator i Aritmetiken kunde være omtrent følgende, hvilken jeg har tænkt at bruge i en lille »Ledetraad ved Undervisningen i Brøk«, nemlig:

I daglig Tale bruger man Udtrykket »Syv Femtedele Gange en Størrelse« i Betydningen »Syv Gange Femtedelen af Størrelsen«. Siger man f. Eks. »I Dag har Per udført syv Femtedele Gange saa meget Arbejde som Poul«, mener man, at Per har udført syv Gange saa meget som Femtedelen af det af Poul udførte Arbejde; og Pers Løn bør da være 7 Gange saa meget som Femtedelen af den Løn, Poul skal have.

Til denne i Sproget gængse Betydning ville vi holde os, og med vore sædvanlige Betegnelser kunne vi da opskrive:

$$\frac{7}{5} . S = 7 . \frac{S}{5}$$

eller $$\frac{3}{5} . S = 3 . \frac{S}{5}, \quad \frac{4}{9} . S = 4 . \frac{S}{9} \text{ o. s. v.}$$

Eks. I. $$\frac{3}{5} . 10 \text{ ℔} = 3 . \frac{10 \text{ ℔}}{5} = 3 . 2 \text{ ℔} = 6 \text{ ℔}$$

$$\frac{2}{9} . 6 \text{ Tdr.} = 2 . \frac{6 \text{ Tdr.}}{9} = \frac{6 \text{ Tdr.}}{9} + \frac{6 \text{ Tdr.}}{9} = 1\tfrac{1}{3} \text{ Td.}$$

$$\frac{7}{12} . 6 \text{ (Benævning underforstaaet)} = 9\tfrac{1}{3}.$$

o. s. v.

II. $$\frac{2}{3} . \frac{6}{11} = 2 . \frac{6}{11 . 3} = \frac{4}{11}$$

o. s. v.

III. Man kender Prisen paa 1 Td.; hvorledes findes Prisen paa $\frac{7}{5}$ Tdr.?

Svar: Prisen paa $\frac{7}{5}$ Tdr. $= 7.$ Prisen paa $\frac{1}{5}$ Td.

$= 7 . \frac{1}{5}$ af Prisen paa 1 Td.,

hvilket jo netop er Betydningen af

$\frac{7}{5}$. Prisen paa 1 Td.

Altsaa: Prisen paa $\frac{7}{5}$ Td. findes ved at multiplicere Prisen paa 1 Td. med $\frac{7}{5}$.

o. s. v.

Jeg skal ikke fortabe mig i Enkeltheder, men blot bemærke, at man da til Slutning kan opstille følgende Regler til Udenadslæren:

I. At multiplicere en Størrelse med en Brøk vil sige at multiplicere den Del af Størrelsen, som Nævneren angiver, med Tælleren.

Anm. At f. Eks. $\frac{3}{5} . S$ derved bliver det samme som $\frac{3}{5}$ af S, er i Overensstemmelse med andre Taleformer: det dobbelte af S = 2 . S, det tredobbelte af S = 3 . S; 10 Fold af Udsæden = 10 . Udsæden o. s. v.

II. Produktet af 2 Brøker = en ny Brøk, hvis Tæller og Nævner = Produktet af Tællerne og af Nævnerne i de givne.

Anm. Multiplikand og Multiplikator kunne ombyttes, saavel naar de ere hele, som naar de ere brudne.

III. Prisen paa en Mængde findes ved at multiplicere Prisen paa Enhedsmaalet med Mængdetallet, baade naar dette er helt og naar det er bruddent. —

Denne, her blot løst skitserede, Fremstilling tror jeg vil kunne bidrage til, at der kommer mere Fylde i Forstaaelsen af det paagældende Punkt. Det er jo nu saaledes, at Eleverne gaa lige fra den mekanisk tillærte »praktiske Regning« — højst med nogle mangelfulde, delvis falske Begrundelser — over i den formelle Algebra, hvis System de da i Reglen mangle Betingelser for at kunne gribe. I det udviklede har jeg paa dette enkelte Punkt søgt at danne et Mellemled, idet Reglen ikke udgives for andet end det, den er, en Definition, valgt med Hensyn til det daglige Livs Taleformer.

At man saa har Definitionen liggende tilrede, naar man kommer til Algebraen, og dér altsaa blot har at paavise dens formelle Betydning for Reglernes Almengyldighed, kan jo kun betragtes som heldigt.

Løste Opgaver.

167. Bring Ligningen

$$1 + ab + ac + ad + bc + bd + cd = 0$$

paa simpel Form efter at have udført Substitutionerne

$$a = \frac{1+A}{1-A},\quad b = \frac{1+B}{1-B},\quad c = \frac{1+C}{1-C},\quad d = \frac{1+D}{1-D}.$$

Opløsning: Man har $1 + ab = 2 . \dfrac{1 + AB}{(1 - A)(1 - B)}$ og analoge; indsættes disse Værdier, faas

$$\frac{1+AB}{(1-A)(1-B)} + \frac{1+AC}{(1-A)(1-C)} + \frac{1+AD}{(1-A)(1-D)} + \frac{1+BC}{(1-B)(1-C)}$$

$$+ \frac{1+BD}{(1-B)(1-D)} + \frac{1+CD}{(1-C)(1-D)} - \frac{5}{2} = 0.$$

Multipliceres med Generalnævneren og sammentrækkes:

$$7 - (A+B+C+D) - (AB+AC+AD+BC+BD+CD)$$

$$- (ABC + ABD + ACD + BCD) + 7\,ABCD = 0,$$

$$(1+A)(1+B)(1+C)(1+D) = 8(1+ABCD).$$

(C. E. Schlichtkrull, H. C. Olsen.)

174. Løs Ligningen:

$$x^4 - y^4 = 4641,$$

naar x og y skulle være reelle hele Tal.

Opløsning: Ligningen omformes til

$$(x^2 + y^2)(x^2 - y^2) = 1 . 3 . 7 . 13 . 17.$$

Da $x^2 - y^2$ skal være Faktor i højre Side, kan man have

$$x^2 - y^2 = 1,\ 3,\ 7,\ 13,\ 17,\ 3 \cdot 7,\ 3 \cdot 13,\ 3 \cdot 17,$$

idet tillige den udskilte Faktor skal være mindre end den resterende, der er $= x^2 + y^2$.

Ved Prøve viser det sig, at den eneste Kombination, der giver den fordrede Løsning, er

$$x^2 - y^2 = 21,\ x^2 + y^2 = 221,$$

hvoraf

$$x = \pm 11,\ y = \pm 10.$$

(C. E. Schlichtkrull.)

(Ogsaa løst af H. C. Olsen.)

175. Find Rødderne i Ligningen:

$$x^4 = \frac{9x^7 + 9x^6 + 9x^5 + 5x^4 + 9x^3 + 9x^2 + 9x + 13}{4x^4 - 4}.$$

Opløsning: Ligningen ændres til:

$$4x^8 - 4x^4 = 9x^7 + 9x^6 + 9x^5 + 5x^4 + 9x^3 + 9x^2 + 9x + 13,$$

eller $13(x^8 - 1) = 9(x^8 + x^7 + .. + x) = 9x \cdot \frac{x^8 - 1}{x - 1}$,

der deler sig i

$$x^8 - 1 = 0 \text{ og } 13(x - 1) = 9x.$$

Af den første faas $x = 1^{\frac{1}{8}}$, hvorfra dog Roden 1 undtages (den er indført ved Summation af Kvotientrækken).

Af den anden faas $x = \frac{13}{4}$.

(H. C. Olsen.)

177. Bevis, at Tallet $9^n - 8n - 1$ er deleligt med 64.

Opløsning:

$$9^n - 8n - 1 = (8 + 1)^n - 8n - 1$$

$$= 8^n + K_{n,1} \cdot 8^{n-1} + K_{n,2} \cdot 8^{n-2} + \ldots\ldots$$

$$+ K_{n,n-2} \cdot 8^2 + K_{n,n-1} \cdot 8 + 1 - 8n - 1$$

$$= 8^n + K_{n,1} \cdot 8^{n-1} + K_{n,2} \cdot 8^{n-2} + \ldots\ldots K_{n,n-2} \cdot 8^2$$

Da 64 gaar op i hvert enkelt Led, gaar det op i hele Størrelsen.

(Chr. M. A. Østergaard,)

(Ogsaa løst af H. C. Olsen, og ved Induktion af H. S. Nielsen.)

178. Vis, at $x - 2$ er Faktor i

$$\begin{vmatrix} x & \frac{l}{m} + \frac{m}{l} & \frac{n}{l} + \frac{l}{n} \\ \frac{l}{m} + \frac{m}{l} & x & \frac{m}{n} + \frac{n}{m} \\ \frac{n}{l} + \frac{l}{n} & \frac{m}{n} + \frac{n}{m} & x \end{vmatrix}$$

og find de øvrige Faktorer.

Opløsning: Størrelsen kan skrives

$$x^3 - 4x - (x-2)\left(\frac{l}{m}+\frac{m}{l}\right)\left(\frac{m}{n}+\frac{n}{m}\right)\left(\frac{n}{l}+\frac{l}{n}\right),$$

der viser, at $x - 2$ er Faktor. De andre to Faktorer findes af Ligningen

$$x^2 + 2x - \left(\frac{l}{m}+\frac{m}{l}\right)\left(\frac{m}{n}+\frac{n}{m}\right)\left(\frac{n}{l}+\frac{l}{n}\right) = 0$$

(H. S. Nielsen.)

(Ogsaa løst af C. E. Schlichtkrull og H. C. Olsen.)

179. Find 4 hele positive Tal af den Beskaffenhed, at deres Sum er lig med Summen af Produktet af det største og mindste af Tallene og Produktet af de to øvrige Tal.

Opløsning: Lad Tallene være x, y, z, u og

$$x < y < z < u.$$

Sættes i Ligningen

$$x + y + z + u = xu + yz,$$

$$x = 1 + a,\ y = 2 + b,\ z = 3 + c \text{ og } u = 4 + d,$$

faar man

$$3a + 2b + c + ad + bc = 0,$$

der kun er mulig for $a = b = c = 0$, da hverken a, b, c eller d kan være negativ.

Man kan da kun have

$$x = 1,\ y = 2,\ z = 3,\ u = 4 + d,$$

der ved Prøve tilfredsstille den opgivne Ligning for enhver Værdi af d, altsaa $u = 4, 5, 6 \ldots\ldots$

(C. E. Schlichtkrull, H. S. Nielsen.)

(Ogsaa løst af H. C. Olsen.)

180. Hvor gammel er en Mand i dette Øjeblik, naar hans Alder netop er lig Summen af Ciffrene i hans Fødselsaar.

Opløsning: Man har, idet Fødselsaaret antages at være $1800 + a \cdot 10 + b$, if. Opg:

$$1 + 8 + a + b = 93 - (10a + b)$$

eller $11a + 2b = 84,$

hvoraf $a = 6, b = 9.$

Fødselsaaret 1869, Alderen 24 Aar.

(H. S. Nielsen.)
(Ogsaa løst af C. E. Schlichtkrull og H. C. Olsen.)

186. A og B ere to vilkaarlige positive Tal og m et helt positivt Tal; vis, at man altid har

$$(A + B)^m < 2^{m-1}(A^m + B^m).$$

Opløsning: Ved at anvende Binomialformlen paa $(a + x)^m$ og $(a - x)^m$ faar man

$$(a + x)^m + (a - x)^m = 2a^m + 2 \cdot \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a^{m-2} x^2 \ldots\ldots$$

altsaa, naar a er positiv

$$(a + x)^m + (a - x)^m > 2a^m.$$

Sættes nu $a + x = A, a - x = B$, faar man

$$A^m + B^m > 2\left(\frac{A+B}{2}\right)^m; \; (A + B)^m < 2^{m-1}(A^m + B^m);$$

hv. sk. b.

(J. Byskov.)
(Ogsaa løst af Chr. M. A. Østergaard.)

187. Løs Ligningen

$$\text{arc tg}\, x^2 + \text{arc tg}\, x = \text{arc tg}\, \frac{1}{3}$$

Opløsning: Af Definitionen af arc tgx og Formlen for tg til en Sum af 2 Buer faar man Formlen

$$\text{arc tg}\, a + \text{arc tg}\, b = \text{arc tg}\, \frac{a+b}{1-ab}.$$

Ved Anvendelse af denne Formel faar man dernæst

$$\text{arc tg}\, \frac{x^2 + x}{1 - x^3} = \text{arc tg}\, \frac{1}{3}; \; \frac{x^2 + x}{1 - x^3} = \frac{1}{3};$$

$$x^3 + 3x^2 + 3x - 1 = 0; \; (x + 1)^3 = 2;$$

Den eneste reelle Værdi er altsaa $x = \sqrt[3]{2} - 1.$

(J. Byskov.)

188. Løs Ligningen

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} + (1-x)^{\frac{1}{2}} = 1$$

paa en saadan Maade, at Prøve er overflødig.

Opløsning: Sættes

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = y \text{ og } (1-x)^{\frac{1}{2}} = z$$

haves $y + z = 1$ og $y^2 + z^2 = 2$,

hvoraf enten $y = (1+x)^{\frac{1}{2}} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$

$$z = (1-x)^{\frac{1}{2}} = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$$

og $x = y^2 - 1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

eller $y = (1+x)^{\frac{1}{2}} = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$

$$z = (1-x)^{\frac{1}{2}} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

og $x = y^2 - 1 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ er Rod i Ligningen $\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} = 1$;

$x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ » » $-\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} = 1$.

Ligningerne $\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} = \pm 1$ have ingen Rødder.

189. Hvad kan man slutte om en Trekant, hvis Vinkelfunktioner tilfredsstille Relationen

$$\operatorname{tg} B \sin^2 C = \operatorname{tg} C \sin^2 B.$$

Opløsning. Da hverken sin B eller sin C kan være Nul, kan man dividere paa begge Sider af Lighedstegnet med sin B sin C, hvorved man faar

$$\frac{\sin C}{\cos B} = \frac{\sin B}{\cos C};$$

$$\sin C \cos C = \sin B \cos B;$$

eller $\sin 2C = \sin 2B$.

Da nu $\sin a = \sin[(2k+1)\pi - a] = \sin(2k\pi + a)$, faar man

[1]) $2C = (2k+1)\pi - 2B$, der giver, for $k = 0$, $C + B = \frac{\pi}{2}$

[2]) $2C = 2k\pi + 2B$, der giver, for $k = 0$, $C = B$.

Andre Værdier af k kunne paa Grund af, at C og B ere Vinkler i en Trekant, ikke bruges.

Trekanten er altsaa enten ligebenet eller retvinklet.

(J. Byskov.)

Opgaver til Løsning.

194. Findes der i den naturlige Talrække 100 paa hinanden følgende Tal, hvoraf intet er et Primtal?

(J. Byskov.)

195. Paa hvormange Maader kunne 33 Øre fordeles blandt 13 Personer?

(S. Bentzon.)

196. Som bekendt kunne to symmetriske uligesidede Trekanter ikke bringes til Dækning alene ved en Bevægelse i deres Plan. Hvorledes kan man nu dele den ene Trekant i tre Dele, saaledes at man dermed kan dække den anden ved Bevægelser i Planen.

197. Bevis, at

$$\frac{x}{\sqrt{\frac{1}{2}(1 + x^2 + y^2) - \sqrt{\frac{1}{4}(1 + x^2 + y^2)^2 - x^2}}} \geq 1,$$

naar x og y ere reelle Tal.

(196—97 efter Zeitschr. f. mat. u. natw. Unterricht.)

198. Bevis, at en Trekant er ligesidet, naar Radius i den omskrevne Cirkel er dobbelt saa stor som Radius i den indskrevne Cirkel.

(Efter Educat. Times.)

Matematikens Udvikling i Sammenhæng med Kulturens Udbredelse.

Forkortet Uddrag af en Festtale, holdt af Rektor E. Lampe den 26. Jan. 1893 ved den kgl. tekn. Højskole i Berlin i Anledning af Kejser Wilhelms Fødselsdag. (Zeitschrift der mathem. u. naturw. Unterricht. 4. Hefte 1893.)

. . . .

. . . Ægypterfolket har i Papyrus Rhind efterladt os en Bog, hvoraf vi lære dets ikke særlig betydelige matematiske Viden ved omtrent Aar 200 f. C. at kende. Dog har Piazzi Smyth ved Maaling af den store Cheops Pyramide villet bevise, at der — altsaa 3000 Aar f. C. — har været en hemmelig matematisk Viden af langt større Omfang, og at derved de Beretninger om Kundskab, som græske Rejsende have bragt hjem fra Nillandet, kunne forklares.

Til fuldkommen Symfoni hævede Matematiken sig hos det særlig benaadede græske Folk. Den musikkyndige Filosof og Matematiker Pythagoras søgte i de Tal, som angave de syv Toners Harmoni, Hemmeligheden ved de syv Planeters Verdensordning, som ved deres Bevægelse frembragte Sfærernes Musik for de Udødelige.

I syv Aarhundreder var Grækenland toneangivende i vor Videnskab, og de uforgængelige Værker, som ere bevarede efter den antike Kulturs Undergang, ere endnu et Mønster for os i skarp logisk Fremstilling. Derfor kunde en af den antike Kulturs bedste Kendere, den lærde danske Geometrer Zeuthen, for kort Tid siden med fuld Ret sige, at der i hele den nyere Tid stedse kunde gjøre sig Indflydelse gældende fra den græske Geometris Side. Og Romerfolket, som i Kunsten maatte nøjes med den Rolle at efterligne de græske Forbilleder, har heller ikke nogen betydelig Matematiker at opvise.

De skarpsindige Undersøgelser, som Inderne havde anstillet paa Taltheoriens Omraade, egnede sig fortræffeligt til Forstand

Øvelse og bleve begærligt optagne af Araberne, som fordybede sig i Grækernes og Indernes Visdom, og overførte den paa ejendommelig Maade omdannede og forøgede matematiske Viden til det vestlige Evropa, og den samme Nation, hvem Evropæerne skylde saa meget Stof til Digtning, har saaledes ogsaa ført den matematiske Forskning fra Indien til den pyrenæiske Halvø.

Renaissancen med dens mangeartede Bestræbelser, som bundede i det begejstrede Studium af den antike Literatur og Kunst, skaffede ogsaa Matematiken et Opsving, efter at man først gennem Araberne havde gjort Bekendtskab med de indiske Tal, og Bogtrykkerkunsten sørgede for, at der fandt en livlig Udveksling af Forskningsresultater Sted mellem de enkelte Folkeslag.

Førend vi nu gaa over til den nyere Tid, synes det hensigtsmæssigt at henvise til den nøje Forbindelse mellem den matematiske og filosofiske Tænkning. Mange af de betydeligste Filosofer have ogsaa udmærket sig i Matematiken. Naar vi forbigaa Thales af Milet og Pythagoras, maa vi dvæle et Øjeblik ved Plato, den første af de to største græske Filosofer. Hans Ord μηδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰσίτω *) skulde tilskynde alle Ynglinge, som vilde være hans Elever, til at beflitte sig med Geometri, før de traadte ind i hans Akademi. Ganske vist stillede Plato ikke Geometrien lige med Filosofien, men den var en nødvendig Forøvelse. Logikens Sætninger kunde intetsteds anskueliggøres saa klart, som ved Matematikens rene Begreber, og i Værkerne om Logik finder man derfor de fleste Eksempler laante fra Geometrien.

Den nyere Filosofis Befrielse fra Overleveringens Baand skylde vi Descartes, denne højtdannede Franskmand, om hvem det er umuligt at sige, om hans Fortjenester som den nyere Filosofis Fader er større end som Opdager af den analytiske Geometris Methode, som slynger et snævert Baand om Geometri og Algebra. De matematiske Studier vare paa hin

*) d. v. s. »Uden Kendskab til Geometrien tør ingen træde herind.«

Tid saa nøje knyttede til de filosofiske, at hans Efterfølger i Filosofien, Benedictus de Spinoza, som i Dybde og Tankekækhed langt overgik ham, holdt det for nyttigt at fremstille den Cartesianske Filosofis Principer i en lille Bog *more geometrico demonstrata* d. v. s. i Form som Euclids Lærebog i Geometri, en Form, som han ogsaa bragte i Anvendelse i sit Hovedværk Ethiken. Derved bliver det forklarligt, at i England, hvor Newton, ligestor i matematisk, filosofisk og theologisk Dannelse, trængte dybere ind i Naturens Indre end andre Dødelige, at hér Naturforskeren betegnes som *natural philosopher*.

Endelig have vi i Tyskland lysende Eksempler paa Filosofer, som ad Matematikens Vej trængte ind til den dybeste Erkendelse. Frem for alle maa man nævne Leibnitz, hvis maaske uforgængeligste Arbejde tilhører Matematikens Omraade. Ikke længe efter Leibnitz opstod den nyere Tids største Filosof Kant, som først studerede Matematik, men samtidig hengav sig til filosofiske Spekulationer. Ogsaa hans Skrifter ere gennemsyrede af matematiske Betragtninger, og den Kendsgerning, at der eksisterede en matematisk Videnskab, har udøvet en afgørende Indflydelse paa hans filosofiske Systems Dannelse. Ham skylde vi den smukke Udtalelse, at enhver Naturvidenskab kun forsaavidt er Videnskab, som den er blevet Matematik. Blandt Kants Efterfølgere finde vi kun faa matematisk skolede Aander. Fichte, Schelling, Hegel ere ikke trængte ind i Matematikens Væsen, men de have heller ikke frembragt meget af blivende Værd. Herbart derimod, som anvendte den højere Matematiks Betragtningsmaade paa de psykologiske Problemer, udøver endnu i vor Tid i Pædagogiken en betydelig Indflydelse ved sin Lære om den opdragende Undervisning. For endelig heller ikke at glemme de nyeste Filosofer, saa omtaler Eduard von Hartmann i sin Selvbiografi, at han skylder Matematikerne Schellbach og Bertram den første Tilskyndelse til Beskæftigelse med filosofiske Problemer.

Vi vende nu tilbage til den historiske Oversigt over den nyere Matematiks Udvikling siden Reformationstiden. Tyskeren

Kopernikus, som ved et fleraarigt Ophold i Italien havde lært dette Lands aandelige Opsving at kende, hidførte ved sit Værk: »*De revolutionibus orbium coelestium*« en ny Verdensanskuelse. En anden Tysker Kepler og Italieneren Galilæi berede ved deres Opdagelser og Begrebsdannelser Vejen for Newton. Franskmanden Descartes, en af Corneilles og Pascals Samtidige, opfinder den analytiske Geometri. Nederlænderen Huygens forener geometrisk Skarpsindighed med skarpt Blik for mekaniske Anvendelser, og ved Slutningen af det syttende Aarhundrede hæver Englænderen Newton sig højt over sine Samtidige, og giver den naturvidenskabelige Tænkning den moderne Retning. Paa samme Tid staar i Tyskland Leibnitz paa en saadan Højde i alle Videnskaber, som længe før og efter ham ingen Anden. Begge disse store Mænd forfærdige de Instrumenter, fra hvilke den højere Matematiks Toner senere ere udgaaede; deres Tilhængere strides heftigt om Mestrenes Fortrin. Begge begejstre en Række betydelige Efterfølgere: Leibnitz de til den tyske Stamme hørende Bernoulli'er og Euler, Newton Cotes, Taylor og Maclaurin. Da tilegne Franskmændene sig den af Leibnitz udtænkte Kalkyl, og Forskerne l'Hôpital, Clairaut, d'Alembert, Maupertuis, Lagrange, Legendre, Laplace vise, at det Leibnitz'ske Instrument frembringer smukkere Melodier end den Newtonske Lyre, som forlangte netop en Newton til Spiller.

Den Forestilling, at Videnskaben er et fælles Gode for hele Menneskeheden, og ikke bundet til et enkelt Folks Skranker, blev den herskende i dette Oplysningens Aarhundrede, og viste sin Virkning i Monarkernes Bestræbelser for at vinde og fængsle de fremragende Matematikere af enhver Nationalitet til de af dem med Forkærlighed beskyttede Akademier. For at hæve Berliner Akademiet til den mest glimrende Hædersplads kaldte Frederik den Store til dets Præsident Franskmanden Maupertuis, som ved den heldigt endte Gradmaaling i Lapland for første Gang ved Maaling havde bekræftet Jordens Fladtrykthed

ved Polerne, og derved hjulpet Newtons Theori til Sejr over de Cartesianske Hypotheser. Baseleren Leonhard Euler var tre og tyve Aar i Træk Berliner Akademiets Pryd, og da Kejserinde Katharina for længere Tid havde vundet ham for Rusland, lykkedes det at knytte Aarhundredets berømteste Franskmand Lagrange til Akademiet som Direktør, en Stilling, den i Piemont fødte Lærde senere ombyttede med en anden i Paris. Som Lagranges Kollega virkede ved Siden af ham den dybsindige Lambert fra Mühlhausen, som Døden for tidligt bortrev fra hans videnskabelige Arbejder. Bestræbelserne for ogsaa at bevæge d'Alembert til at tage Ophold i Berlin strandede paa denne beskedne, men selvstændige Mands Uafhængighedsfølelse. Naar man nu betænker, at Frederik den Store ligesom Goethe paa Grund af Ukendskab til Matematiken aldeles ikke elskede denne, men tværtimod gerne forfulgte den med Vittigheder og Sarkasmer, saa indser man, hvor højt Matematikens Betydning for Kulturen blev skattet i forrige Aarhundrede.

De Revolutionsstorme, som bruste hen over Frankrig i forrige Aarhundrede, berørte ogsaa vor Videnskab.

Det Aands-Opsving, som var forbundet med Revolutionens Tidsalder, bevirkede, at Frankrig i flere Aartier gik i Spidsen for den matematiske Civilisation. Denne Glans i det videnskabelige Liv er nøje knyttet til Stiftelsen af École Polytechnique, denne Skole, der staar uden Forbillede og uden Lige i Evropa, og som til næste Aar vil kunne fejre sin hundredaarige Bestaaen. Monge, Lagrange, Prony, Laplace vare de første Lærere i Matematik og Mekanik. Som Elever i de første to Aartier nævne vi Malus, Thenard, Gay-Lussac, Poinsot, Poisson, Dulong, Petit, Arago, Fresnel, Canchy, Dumas.

Medens saaledes Frankrigs matematiske Hæder ved Begyndelsen af vort Aarhundrede stod ubestrideligt fast ved Mængden af første Rangs Aander, straalede i Tyskland ensomt en Stjerne af første Størrelse paa den matematiske Him-

men én, som overstraalede alle andre i Evropa, Carl Friederich Gauss, hvis Geni hævede sig i ubeskrivelig kæk Flugt over alle Samtidige, som en værdig Fyrste for Matematikerne ved Siden af Digterfyrsterne Goethe og Schiller. Først i Aarhundredets tredie Aarti opstod i Tyskland andre fremragende Matematikere, men nu ogsaa i saadan skabende Fylde og Kraft, at Stemmeføringen i den matematiske Koncert lidt efter lidt gik over til Tyskland. Jacobi, Steiner, Dirichlet, tre Navne, som ere Berliner Akademiets og Universitetets Pryd, prange øverst i den statelige Række af matematiske Forskere, som overgave deres Arbejder til Offentliggørelse i den af Crelle stiftede Journal for den rene og anvendte Matematik; til dem slutter sig den unge Nordmand Abel, for hvem hans Fædreland ingen Plads havde, som ikke blev bemærket af de store Pariser-Matematikere under sit Ophold i Frankrig, men for hvis Geni Crelle havde en dunkel, men sikker Følelse. Omendskønt alle disse Mænd sikrede den ny Journals Bestaaen, saa tilkommer der dog Stifteren af denne Æren for at have erkendt den Form, i hvilken vort Aarhundredes matematiske Forskning bedst bliver udbredt, og derved at have befordret Matematikens Udvikling paa den virksomste Maade. Matematiken bliver nu ikke blot plejet i Evropa; de andre Verdensdele medvirke til Kulturens Fremskridt og deltage i det fælles Arbejde. Forrest maa Amerika nævnes, som netop nu kan se tilbage paa en firehundredaarig Berøring med evropæisk Kultur.

Hvor højt Matematiken skattes i Amerika med Hensyn til et Folks Aandsliv, viser en Ytring af Præsident Gilman ved Stiftelsen af *John Hopkins University* i Baltimore paa Spørgsmaalet om, hvorledes man skulde bære sig ad ved Indrettelsen deraf. »Kald en stor Matematiker og en udmærket klassisk Filolog, saa vil Eders Opgave være løst. Den ene Del af Værket bringe de selv med, den anden skabe vi.« Sylvester blev kaldet 1876, og for første Gang optraadte i Amerika en virkelig betydelig Matematiker. Han stiftede

American Journal of Mathematics, som ogsaa efter denne Lærdes Tilbagevenden til England (1884) bliver fortsat og indeholder mange betydelige Arbejder ikke blot af amerikanske, men ogsaa af evropæiske Matematikere.

Overalt paa Jorden, hvorhen Englænderne have forplantet deres Kultur, ere ogsaa lignende lærde Selskaber og Dannelsescentrer opstaaede som i Moderlandet, saaledes i Caplandet, i Indien, paa Nyholland, og overalt udstraaler det matematiske Lys fra disse Centrer. Som Tegn paa, at endelig ogsaa det japanesiske Ørige vil holde Skridt med den evropæiske Udvikling, kan anføres, at der i Tokio ved Siden af Akademiet og dettes Skrifter er opstaaet en matematisk Journal.

Ligesom i de øvrige Videnskaber, har den matematiske Litteratur taget et saadant Opsving, at det er umuligt for den enkelte Forsker at overse denne. Derfor er en sammenfattende Beretning blevet nødvendig, som sagligt ordner det enkelte Aars Litteratur og kort angiver de enkelte Skrifters Indhold. *Jahrbuch über die Forschritte der Mathematik* har har stillet sig denne Opgave og søger siden 1868 at løse den i alle Matematikeres Interesse. 54 Medarbejdere, af hvilke 15 udenfor Tyskland, have i den sidste Aargang viet deres Kræfter til Foretagendet. Medens Aarbogen udelukkende forfølger dette Maal, søge ogsaa andre Tidskrifter som *Bulletin des sciences mathématiques* at holde deres Læsere à jour med de fremkomne Arbejder.

Afsætningen af Bøger, som have til Øjemed at popularisere Videnskaberne, vidner om de store Massers Kundskabstrang. I Frankrig har saaledes Astronomen Flammarion ved aarelang utrættelig Virksomhed opnaaet, at hele Landet er overtrukket med et Næt astronomiske Selskaber, bestaaende af Lægmænd. Hans Skrifter som ere affattede i et elegant Sprog med digterisk Sving og kæk Fantasi, finde, ikke blot i Frankrig, en overordentlig Udbredelse.

I England bestod allerede i forrige Aarhundrede *Journal*

Ladies Diary, indeholdende matematiske Opgaver og indsendte Løsninger. Om denne sagde en engelsk Lærd, at den havde opdraget flere Matematikere i England end alle Kongerigets matematiske Forfattere tilsammen. Samme Øjemed er nu *Educational Times* helliget. Blandt Indsendere af Opgaver og Løsninger træffer man alle engelske Matematikere, men forøvrigt Enhver, som er i Stand til at finde Løsningerne, ogsaa mangen en Dame. Hos os (i Tyskland) findes der blandt de produktive Matematikere en Ulyst til at befatte sig med saadanne Opgaver. En Universitets Professor mener, at et saadant Arbejde er under hans Værdighed, en anden undlader det, for at den første ikke skal udlé ham. I England skamme Cayley og Sylvester sig ikke ved at behandle en elementær Opgave, og bidrage derved til, at Matematiken vinder Interesse i videre Kredse. Den engelske Dameverden beviser, at ogsaa den kvindelige Aand er skikket til at opfatte Matematikens Abstraktioner. Ogsaa for andre Kredse kan Beskæftigelse med Matematik tilraades. Naar Büchsel i sine Erindringer fra en Landsbypræsts Liv fortæller, at han i Lacroix' Differentialregning har fundet en aandelig Rekreation efter sin Embedsgerning, saa se vi heri det store Fortrin, som Beskæftigelse med Matematik har for enhver, som lever fjærnt fra en By og dennes Kunstnydelser. Det Trylleri, som Matematiken udøver paa Enhver, som hengiver sig til den, har bestandig været ubegribeligt for udenforstaaende Medmennesker og ofte givet Anledning til Spot over den begejstrede Matematiker.

Det maa maaske være mig tilladt at anføre to Eksempler paa Amerikanere, som skønt udgaaede fra det menige Folk ere blevne grebne af dette Trylleri og ved egen Kraft have arbejdet sig op til at blive betydelige Matematikere.

Nataniel Bowditch, født 1773 i Massachusetts, laante som Kræmmerlærling en Lærebog i Algebra, tilegnede sig den uden Lærer, satte sig senere i sin Fritid ind i Chambers' Encyclopaedia, lærte Latin for at studere Newtons Principia, og gav sig, 22 Aar gammel, i Færd med at læse dette store

Værk. Som Sømand under en venligsindet Kaptejn indviede han Matroserne i Hemmeligheden ved Stedbestemmelsen, saa at Kaptejnen med Tilfredshed kunde sige, at alt var Harmoni ombord, alle vare ivrige efter at blive underviste; af en Besætning paa 12 Mand kunde enhver tage en Maanedistance og beregne en Iagttagelse. Ved Siden heraf lærte Bowditch ogsaa Fransk, udgav en nautisk Almanak, oversatte Laplaces Mécanique céleste, og Amerika er endnu idag stolt over denne Oversættelse, om hvilken Legendre skrev til ham: »Deres Arbejde er ingen slet og ret Oversættelse; jeg anser den for et nyt forøget og forbedret Oplag, og ovenikøbet et saadant, som kunde været kommet fra Forfatterens egen Haand, naar han havde taget Hensyn til sin egen Interesse, d. v. s., naar han ivrigt havde bestræbt sig for at være klar.«

En Grønthandler Artemas Martin, født 1835, fandt Behag i vanskelige Regneopgaver, skaffede sig Lærebøger i Aritmetik og studerede dem i sine Fritimer, beskæftigede sig med Løsning af Opgaver i Tidsskrifter og udtænkte nye. For at udbrede dem, anskaffede han en Haandpresse, satte og trykte sine Opgaver, og udgav dem i et nyt Tidsskrift *Mathematical Visitor*, som han saaledes ganske alene stillede paa Benene. Han blev lidt efter lidt en Autoritet med Hensyn til diophantiske Opgaver og Sandsynligheds-Problemer. Ved sine Sparepenge forskaffede han sig et meget værdifuldt matematisk Bibliothek, opnaaede Doktor-Titlen, og er nu Bibliothekar for de forenede Staters Landmaalingsvæsen.

Saadanne Eksempler bevise, at vor matematiske Videnskab er vel egnet til at vække Sansen for aandelige Nydelser, selv om ikke Enhver er egnet til at udvikles ved Betragtning af dens Sandheder eller til at forfriske sin Aand ved at beskæftige sig med dens Problemer. . . . .
. . . .

(B.)

Elementære Bestemmelser af Maximum og Minimum.

(Til Undervisningsbrug.)

(Af C. Juel.)

For at finde den største og mindste Værdi (Maximum og Minimum) af en Funktion f(x) af x for reelle Værdier af x kan man ofte bære sig saaledes ad, at man antager Funktionens Værdi bekjendt og f. Ex. sætter den lig et Tal y, opløser den derved dannede Ligning med Hensyn til x og diskuterer Udtrykket for Roden.

I de Exempler, vi her særlig faa at gjøre med, vil Udtrykket for x indeholde en Kvadratrod, og Discussionen maa da bygges paa, at det for reelle Værdier af x kræves, at det, der staar under Rodtegnet, er positivt. I Virkeligheden løser man dog herved en almindeligere Opgave, idet man bestemmer alle de Værdier, som Funktionen kan antage for reelle Værdier af x, og ikke alene de største og mindste.

Ex. 1. Undersøg Værdierne af $\frac{x^2-2x+5}{3x^2-6x+4}$ for reelle Værdier af x.

Vi sætte $y = \frac{x^2-2x+5}{3x^2-6x+4}$,

hvoraf $(3y-1)x^2 - 2x(3y-1) + 4y - 5 = 0$

$$x = \frac{3y-1 \pm \sqrt{-3y^2+13y-4}}{3y-1}. \qquad (1)$$

For at bedømme Fortegnet for Polynomiet under Rodtegnet, skal man efter bekjendte Regler sætte det lig nul og finde Rødderne. Da disse her blive reelle, opløses Polynomiet i Faktorer, og man finder

$$-3y^2+13y-4 = -(3y-1)(y-4).$$

Naar x skal være reel, maa man altsaa have

$$\frac{1}{3} \leq y \leq 4.$$

Maximum og Minimum for y er altsaa henholdsvis 4 og $\frac{1}{3}$.

De tilsvarende Værdier for x faar man ved at indsætte y's Værdier i (1). Derved finder man, at $x = 1$ svarer til Maximum og $x = \infty$ til Minimum af y. Det sidste betyder, at y vil aftage og nærme sig mere og mere til $\frac{1}{3}$, naar x er bleven tilstrækkelig stor og derefter voxer i det uendelige.

Ex. 2. Undersøg Værdierne af $\frac{(2x-1)^2}{(x-2)(x+3)} + 1$ for reelle Værdier af x.

Opløses Ligningen $y = \frac{(2x-1)^2}{(x-2)(x+3)}$ m. H. t. x, faar man

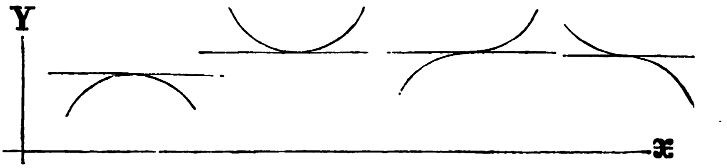
$$x = \frac{-y-4 \pm \sqrt{25y^2 - 84y}}{2(y-4)}.$$

Polynomiet $25y^2 - 84y = y(25y - 84)$ er positiv, naar y enten er større end $\frac{84}{25}$ eller mindre end 0 [hvilke svare til henholdsvis $x = \frac{23}{4}$ eller $x = \frac{1}{2}$]. Disse to Tal ere Grændseværdier for y, men de ere ikke Maximum eller Minimum i sædvanlig Forstand.

De kunne derimod kaldes saaledes, naar man lægger en anden Definition til Grund. Man kan nemlig for at betegne væsentlig éns Løsninger paa samme Maade sige, at $y = f(x)$ er Maximum for $x = a$, naar $f(x)$ er større for $x = a$, end for Værdier af x, der baade ere lidt større og lidt mindre end a. Paa tilsvarende Maade defineres da et Minimum af $f(x)$.

Gjør man det, vil den ovennævnte Funktion have et Maximum for $x = \frac{1}{2}$ og et Minimum for $x = \frac{23}{4}$. Fremstilles Funktionen grafisk, idet man tager x og y som retvinklede Koordinater, faar Fig. 1 og Fig. 2 henholdsvis i Nærheden af Maximums og Minimumsværdien.

Fig. 1. Fig. 2. Fig. 3. Fig. 4.



Ex. 3. Undersøg Værdierne af $\frac{x^2 + 2x}{2x^2 - 1} = y$.

Man finder $x = \frac{1 \pm \sqrt{2y^2 - y + 1}}{2y - 1}$.

Polynomiet under Rodtegnet er stadig positiv, derfor kan det givne Udtryk for reelle x antage alle mulige reelle Værdier.

Ex. 4. Undersøg Værdierne af $a \sin x + b \cos x$ for reelle Værdier af x (a og b positive).

Man sætter som før

$$a \sin x + b \cos x = y \qquad (1)$$

og finder $\sin x$ og $\cos x$ af denne Ligning i Forbindelse med

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1. \qquad (2)$$

Elimination af cos x giver

$$b^2 \sin^2 x + (y - a \sin x)^2 = b^2$$

$$(a^2 + b^2) \sin^2 x - 2ay \sin x + y^2 - b^2 = 0$$

$$\sin x = \frac{ay \pm \sqrt{b^2 (a^2 + b^2 - y^2)}}{a^2 + b^2}. \qquad (3)$$

Af (3) og (1) findes derpaa

$$\cos x = \frac{by \mp \sqrt{a^2 (a^2 + b^2 - y^2)}}{a^2 + b^2}. \qquad (4)$$

Da (1) ogsaa er benyttet uden Kvadrering, ere vi fri for fremmede Rødder, naar vi baade benytte (3) og (4).

Reelle Værdier af sin x og cos x kræver nu:

$$-\sqrt{a^2 + b^2} \leq y \leq \sqrt{a^2 + b^2},$$

saa at Minimum for y er $-\sqrt{a^2 + b^2}$, Maximum $+\sqrt{a^2 + b^2}$. Da det udtrykkelig i Opgaven er krævet, at x skal være reel, maa det ogsaa undersøges, om man for disse Grænseværdier af y faar $\sin^2 x < 1$.

Indsættes imidlertid $y = \pm \sqrt{a^2 + b^2}$ i (3) og (4), faar man

$$\sin x = \pm \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \cos x = \pm \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

der ere numerisk mindre end 1, hvilket ogsaa følger af, at (1) er tilfredsstillet for reelle sin x og cos x; Fortegnene ere sammenhørende.

Da Maximum og Minimum af sinus (eller cosinus) af en reel Vinkel er umiddelbart bekjendt, kan man ogsaa i adskillige [illegible]e benytte sig deraf f. Ex. ved den foreliggende Opgave.

Man behøver nemlig kun at bestemme r og v, saaledes at

$$a = r\cos v, \quad b = r\sin v,$$

hvad man altid kan tilmed saaledes, at r bliver positiv. Man finder: $r = +\sqrt{a^2 + b^2}$, $\cos v = \frac{a}{r}$, $\sin v = \frac{b}{r}$.

Indsættes dette i (1), faar man

$$y = r\cos v\sin x + r\sin v\cos x = r\sin(v + x),$$

hvorved man umiddelbart sèr, at y's største og mindste Værdier ere $+\sqrt{a^2 + b^2}$ og $-\sqrt{a^2 + b^2}$.

Ex. 5. Skal man søge Maximum og Minimum af

$$y = \sin x\cos(a - x),$$

kan dette Udtryk omskrives til

$$y = \frac{1}{2}[\sin a + \sin(2x - a)]$$

saa at Maximum og Minimum resp. svare til $\sin(2x - a) = 1$ og $\sin(2x - a) = -1$.

Ex. 6. Siderne i en Trekant deles alle i samme Omløbsretning i samme Forhold, og de tre Delingspunkter gjøres til Vinkelspidser for en ny Trekant. Naar den givne Trekants Areal er T, hvad er da Arealet af den mindste paa denne Maade indskrevne Trekant.

Vi vælge en bestemt Omløbsretning af Trekantens Omkreds som den positive, og antage, at Delingsforholdet regnet med Fortegn paa den derved fastlagte Maade er m : n.

Man vil da let af en Figur sé, at Arealet af den indskrevne Trekant vil være $T_1 = T\left(1 + \frac{3mn}{(m - n)^2}\right)$,

Man behøver her kun at undersøge Variationen af $\frac{mn}{(m - n)^2}$.

Da dette Udtryk er homogent af 0te Grad m. H. t. m og n, kan det bringes til at indeholde alene Forholdet mellem m og n. Kaldes dette x, sætter man

$$y = \frac{x}{(1 - x)^2}.$$

hvoraf

$$x = \frac{+2y + 1 \pm\sqrt{1 + 4y}}{2y}.$$

Man maa altsaa have $y \geqq -\frac{1}{4}$.

Minimum af T bliver

$$T_1 = T\left(1 - \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{4} T_1$$

der svarer til $\frac{m}{n} = -1$, saa at man faar den mindste indskrevne Trekant ved at forbinde Midtpunkterne af Siderne.

Den samme Methode, som her er brugt til Bestemmelse af Maximum og Minimum af algebraiske Udtryk, kan ogsaa benyttes ved geometriske Maximums (og Minimums) Bestemmelser.

Ex. 7. Find det Punkt paa en given ret Linie, L, hvorfra et givet Liniestykke AB sès under den største (eller mindste) Vinkel.

Det skal ikke være Meningen som Løsninger at medregne, hverken det uendelig fjerne Punkt — hvorfra AB sès under Vinklen o — eller Skjæringspunktet P mellem Linien L og Linien AB — hvorfra AB sès under en Vinkel paa 0^{0} eller paa 180^{0}, eftersom P ligger paa selve Stykket AB eller paa dettes Forlængelse.

I Overènsstemmelse med den før brugte Methode skal man her tillægge Synsvinklen en vis Værdi v, (hvor $0 < v < 180^{0}$). Det geometriske Sted for de Punkter, hvorfra AB sès under Vinklen v, er nu en Cirkel over AB som Korde. Man skal dernæst lade v variere og undersøge; for hvilke Værdier af v Løsning er mulig. Synsvinklen kan man nu aabenbart tillægge en vilkaarlig Værdi, naar det ovennævnte Skjæringspunkt ligger mellem A og B; her findes altsaa intet egentlig Maximum eller Minimum. Naar det derimod ligger paa Forlængelsen af AB, vil Overgang mellem Cirkler, der gaa gjennem A og B og skjære eller ikke skjære Linien L, ské gjennem Cirkler, der berøre L. De to herved bestemte Røringspunkter, der let findes ved Passer og Lineal, svare begge til et numerisk Maximum af Synsvinklen. Regner man derimod Vinklen mellem Retningerne PA og PB begge mindre end 180^{0} og med Fortegn

svarende til en bestemt positiv Omløbsretning for Vinkler, vil det ene af Røringspunkterne svare til Maximum det andet til Minimum.

Fn hel anden Metode til Bestemmelsen af Maximum og Minimum af en Funktion $y = f(x)$ kommer man til ved at tænke sig x og y som retvinklede Koordinater og lægge Mærke til, at i det Punkt af Kurven $y = f(x)$, hvor y er Maximum eller Minimum, vil Tangenten være parallel med X-axen. (sé Fig. 1). Man maa altsaa først bestemme Tangentens Retningskoefficient $\operatorname{tg}\varphi$, og dernæst sætte denne lig Nul, hvorved findes èn eller flere reelle Værdier af x. I nogle Opgaver kan man umiddelbart sè, om en derved funden Værdi a af x svarer til et Maximum eller Minimum. Er dette ikke Tilfældet, maa man sè, hvorledes Fortegnet for $\operatorname{tg}\varphi$ bliver for Værdier af x, der ligger nær ved $x = a$ og ere dels større dels mindre end a.

Af Fig. 1 og 2 ser man nemlig, da $\operatorname{tg}\varphi$ er positiv, naar φ er spids, og negativ, naar φ er stump:

[1]) naar $x = a$ skal svare til Maximum af y, maa $\operatorname{tg}\varphi$ være positiv for Værdier af x, der ere lidt mindre end a, og negativ for x, der ere lidt større end a;

[2]) naar $x = a$ skal svare til Minimum, maa $\operatorname{tg}\varphi$ være negativ for x lidt mindre end a og positiv for x lidt større end a.

Naar $\operatorname{tg}\varphi$ for Værdier af x, der ligge nær ved a og paa forskjellige Sider af a, har det samme Fortegn, vil $x = a$ hverken svare til Maximum eller til Minimum af $y = f(x)$, (se Fig 3 og Fig 4).

Vi ville som Exempel paa denne almindelige Methode tage et Par simple Opgaver,

Ex 8. Søg Maximum og Minimum af

$$y = x^3 - 12x^2 + 7.$$

Tangenten i Punktet (x, y), er efter sin Definition Grænsestillingen for en Sekant, der gaar gjennem (x, y) og et nærliggende Punkt af Kurven, der nærmer sig det første. Naar det nærliggende Punkt antages at have Koordinaterne $(x + h, y + k)$, maa man have

$$y + k = (x + h)^3 - 12(x + h)^2 + 7.$$

Subtraheres de to Ligninger fra hinanden, faas

$$k = 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - 24xh - 12h^2.$$

Sekantens Retningskoofficient, bliver

$$\frac{k}{h} = 3x^2 - 24x + h(3x - 12) + h^2.$$

Gaar man nu til Grænsen ved at lade h og k konvergere mod nul , faas

$$\operatorname{tg}\varphi = 3x^2 - 24x = 3x(x - 8).$$

Tangenten bliver parallel med X.axen for $x = 0$ og for $x = 8$.

Naar x voxer og overskrider Nul, vil $\operatorname{tg}\varphi$ gaa fra en positiv til en negativ Værdi, derfor svarer $x = 0$ til et Maximum 7 af y.

Naar x derimod voxer og overskrider Værdien 8, vil $\operatorname{tg}\varphi$ gaa fra en negativ til en positiv Værdi; derfor svarer $x = 8$ til et Minimum -249 af y.

Ex. 9. Søg Maximum og Minimum af

$$y = \frac{x^3 + a}{x}. \; (a > 0).$$

Ligningen bringes bedst paa hel Form:

$$yx = x^3 + a.$$

Da Punktet $(x + h, y + k)$ skal ligge paa Kurven, faar man

$$(y + k)(x + h) = (x + h)^3 + a.$$

Subtraheres de to sidste Ligninger fra hinanden, faas

$$xk + hk + yh = 3x^2h + 3xh^2 + h^3,$$

hvoraf ved Division med h

$$x\frac{k}{h} + h + y = 3x^2 + 3xh + h^2.$$

$$\frac{k}{h} = \frac{3x^2 + 3xh + h^2 - y - h}{x}.$$

Tangentens Retningskoofficient bliver da

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{3x^2 - y}{x} = \frac{3x^2 - x^2 - \frac{a}{x}}{x} = \frac{2x^3 - a}{x^2}.$$

Denne bliver kun Nul for èn reel Værdi af x, nemlig $x = \sqrt[3]{\frac{a}{2}}$, og denne ses efter den ovenstaaende Regel at svare til et Minimum.

Man kan sige, at $x = \infty$ svarer til Maximum af y (der selv er uendelig for $x = \infty$), saa at $x = \sqrt[3]{\frac{a}{2}}$ let sès nødvendigvis at maatte svare til et Minimum.

Opgaver.

1. Find Maximum og Minimum af følgende Polynomer

$$y = 6x^2 - 8x + 7$$
$$y = 20 - 18x - 3x^2$$
$$y = 12x - x^2.$$

2. Hvilke Værdier kan $\frac{2x^2 + 6x - 3}{3x^2 + 2x - 1}$ antage for reelle Værdier af x; do. $\frac{x^2 - 7x + 6}{x - 10}$.

3. Hvilken Betingelse maa være opfyldt, for at $\frac{ax^2 + bx + c}{a_1x^2 + b_1x + c_1}$ hverken skal have et Maximum eller et Minimum.

Hvilke Betingelser skulle være opfyldte, for at $x = \infty$ skal svare til et Maximum eller Minimum.

4. I et Kvadrat deles alle Siderne i en bestemt Omløbsretning i samme Forhold og Delingspunkterne forbindes. Hvilket er det mindste Kvadrat, der kan dannes paa denne Maade?

5. I en ligebenet Trekant med Grundlinie a og Højden h skal indskrives det størst mulige Rectangel; find dettes Sider.

6. I en Cirkel med Radius R skal indskrives det størst mulige Rectangel. (Løses baade ad algebraisk og ad geometrisk Vej.)

7. I en Cirkel skal indskrives et Rectangel, saaledes at Summen af dettes Areal og Arealet af et Kvadrat, der har en af Rectanglets Sider til Side, bliver saa stor som mu-

8. Hvilken er den største Trekant, der kan dannes, naar den ene Side a og Summen p af de andre 2 Sider er givet. Naar af alle Trekanter med given Perimeter en er den største, hvilken maa denne da være.

9. Om et Rectangel med Siderne a og b skal omskrives det størst mulige Rectangel, find Vinklen mellem en Side i det givne og en tilstødende Side i det søgte Rectangel. (jfr. Ex. 4.)

10. To Byer A og B ligge i Afstanden 200 km. fra hinanden. En Jernbane fra A, som gaar lige mod Nord, passerer i en Afstand af 87 km. fra B. Der skal nu lægges en Landevej fra B til Banen (med tilhørende Station), saaledes at Transporten af Varer fra B til A bliver saa billig som mulig, hvorved man gaar ud fra, at Transporten pr. Axe er dobbelt saa dyr Milen som pr. Bane. I hvilken Afstand fra B skal Landevejen støde til Banen. (Opgaven kan løses baade ad algebraisk og ad geometrisk Vej.)

11. En Person i en Baad er tre Mil fra det nærmeste Punkt A af Strandbredden, der her er retliniet, og ønsker saa hurtigt som muligt at naa et Punkt B af Bredden, hvis Afstand fra A er $\frac{5}{4}$ Mil. Hvor skal han lande, naar han kan ro 1 Mil i Timen men gaa $\frac{5}{4}$ Mil i Timen.

12. Procentindholdet af Alkohol i en Blanding af Vand og Alkohol bliver forskellig eftersom det beregnes efter Vægt eller efter Volumenprocent. For hvilket Volumenforhold mellem Vand og Alkohol i Vædsken vil Differensen mellem de to Procenter blive saa stor som mulig, naar Alkoholens Vægtfylde er 0,795.

13. Ved Operation med to oprindelig lige store Kapitaler tabes stadig paa den ene 10 % p. a. paa den anden 19 % p. a. Hvor naar bliver Forskellen mellem Kapitalerne saa stor som mulig — og hvor stor er da denne Forskel.

14. Bestem det Punkt paa en given Cirkel, hvis Afstande fra to givne Punkter have størst (eller mindst) mulig Kvadratsum (eller Kvadratdifferens).

15. Givet to Punkter A og B samt en ret Linie. Find det Punkt paa Linien hvis Afstande fra A og B have et Forhold, der er Maximum eller Minimum.

16. Konstruer en Trekant, idet a og A ere givne, medens $mb + nc$, hvor m og n ere givne Tal, skal være saa stor som mulig.

17. Læg gjennem to Punkter en Cirkel, der fra et tredie givet Punkt sès under den mindst mulige Vinkel.

18. Hvilken er den største Trekant, der bestemmes ved Axerne i og en Normal til Ellipsen $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

19. Paa en given Ellipse søges et Punkt, hvis Normals Afstand fra Centrum er saa stor som mulig.

20. I en given Kugle skal indskrives den størst mulige Omdrejningskegle (eller — Cylinder), find dens Højde.

21. Om en given Kugle skal omskrives en Omdrejningskegle med mindst mulig Rumfang, find dens Højde.

Et Bevis for Eulers Sætning.

(Af Åsted.)

Vi ville først antage, at alle Fladerne ere Trekanter. Tage vi et s-sidet Hjørne bort, vil den Del af Overfladen, der bliver tilbage, være begrænset af en — plan eller vindskæv — s-Kant. Fra en Vinkelspids i denne kan der trækkes $s - 3$ Diagonaler (Kanter). Betragte vi de derved fremkomne $s - 2$ Trekanter som Grænseflader, vil Overfladen atter være lukket.

Lad Fladernes, Hjørnernes og Kanternes Antal i de to Overflader henholdsvis være F, H, K og F_1, H_1, K_1, da er:

$$F_1 = F - s + s - 2 = F - 2;$$
$$H_1 = H - 1;$$
$$K_1 = K - s + s - 3 = K - 3;$$

altsaa $$F_1 + H_1 - K_1 = F + H - K.$$

Foretage vi denne Operation $H - 4$ Gange, er der et Tetraeder tilbage, men ifølge det udviklede er Tallet $F + H - K$ det samme for dette og det oprindelige Legeme.

Dersom nogle af Fladerne ere Polygoner, deles disse ved Diagonaler i Trekanter, og hver Diagonal regnes med til Kanterne, hver Trekant med til Fladerne. Lad én af Polygonerne være en n-Kant. Ved $n - 3$ Diagonaler deles den i $n - 2$ Trekanter. Fladernes og Kanternes Antal blive herved begge forøgede med $n - 3$. Saaledes gaar det ogsaa med de øvrige Polygoner. Tallet $F + H - K$ bliver altsaa uforandret ved at Overfladen betragtes paa denne Maade. Herefter gaa vi frem som ovenfor, ende med Tetaederet, hvori $F = 4$, $H = 4$, $K = 6$ og finde altsaa, at i ethvert Polyeder er $F + H - K = 2$.

Naturvidenskabelig Litteratur.

Annales de l'Observatoire magnétique de Copenhague,

publiées par Adam Paulsen, Directeur de l'Institut météorologique.

Année 1892. (Copenhague, G. E. C. Gad.)

(Referat.)

Aarbogen er delt i to Afdelinger: I. Observationer foretagne rundt i Landet og II. Observationer, foretagne paa det magnetiske Observatorium i København; Resultaterne af disse sidste ere tabellarisk opgivne.

Af Aarbogens Afdeling I anføres flg. Data: Der er foretaget Deklinationsbestemmelser paa 37 forskellige Steder i

Jylland og paa Øerne, 17 Bestemmelser af Horizontalkomposanten og 14 Inklinationsbestemmelser.

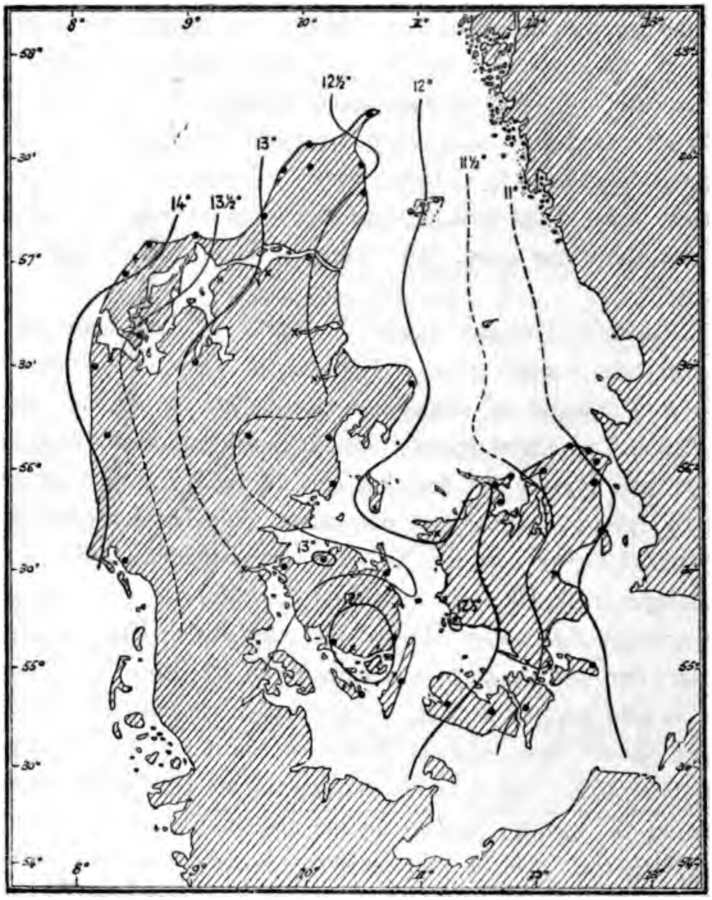
Disse Deklinationsbestemmelser, der ere udførte af Hr. Adam Paulsen, Bestyrer for det meteorologiske Institut, sammen med dem, Bestyreren har foretaget i 1890, og enkelte ældre, ligge til Grund for det Isogonkort over Jylland og Øerne, Aarbogen bringer, og hvoraf Tidsskriftet bringer omstaaende Aftryk*), idet Red. antager, at flere af Tidsskriftets Læsere kunne have Interesse af at gøre sig bekendt dermed. Isogonerne angive Deklinationen efter dennes Middelværdi i 1891. Det vil ses, at de isogone Linjers Gang i det hele er temmelig uregelmæssig, og navnlig gælder dette for dem, der svare til Deklinationer paa 12° og 12½°.

Allerede Lamont fandt i 1858, at Deklinationen i Korsør var anomal stor i Forhold til den i København. Senere Maalinger af daværende Kapt. Mynster-Fischer viste, at denne Uregelmæssighed i Deklinationsforholdene strakte sig langs med Kysten syd for den nævnte By og mod Vest helt ud til Sprogø, medens paa den anden Side Deklinationen ved Kyststrækningen syd for Nyborg var paafaldende lille. De Maalinger, som Hr. Adam Paulsen har udført i 1892 vise, at de omtalte Anomalier hidrøre fra magnetiske Uregelmæssigheder, der strække sig over hele Fyen og Store Bælt. Som det nemlig ses paa Kortet, er Deklinationen i hele det nordlige Fyen anomal stor, idet et Bælte, indesluttet af Isogonen paa 12½°, strækker sig fra den nordvestligste Del af nævnte Ø helt ud til Sprogø; et Deklinationsmaksimum paa 13° findes ved Bogense. Denne magnetiske Anomali kan spores helt over til Korsør og Skjelskør, ved hvilken sidste By Deklinationen atter gaar op til 12½°. Medens saaledes det nordlige Fyen har anomal høj Deklination, er det modsatte Tilfældet for den sydlige Del af denne Ø, hvor der findes en lukket

*) Clichéerne til dette og til de to andre Kort ere os velvilligst overladte af Institutet.

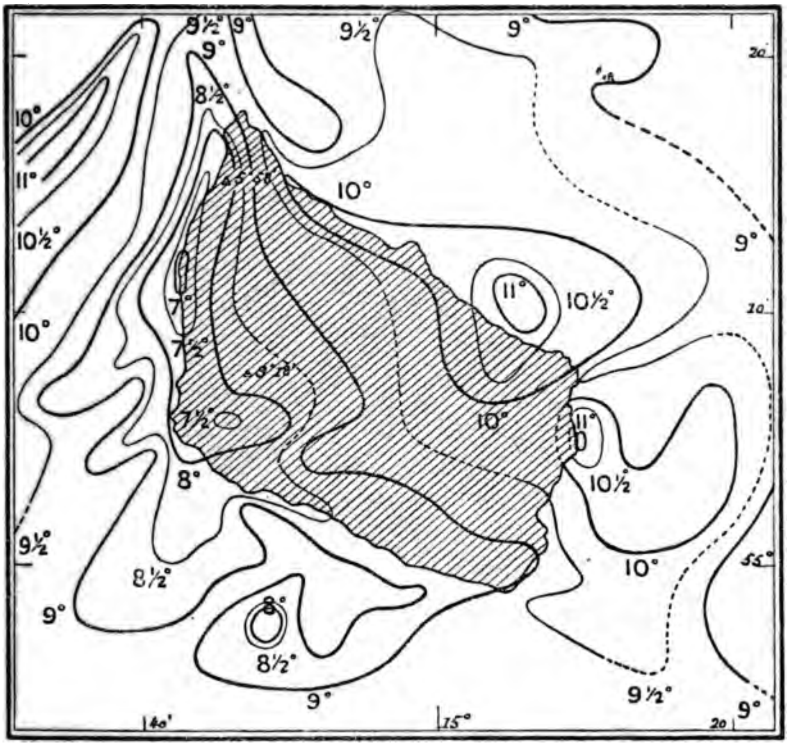
Isogon paa 12 ^{0}, der altsaa indeslutter Punkter med en endnu lavere Deklination.

Det andet Kort angiver specielt Isogonernes Udseende paa Bornholm og de nærmeste Farvande og udviser mærkelige uregelmæssige Forhold. Medens Deklinationen paa Øens Vestkyst



normalt skulde være ca. 9^0 30′, paa det østligste Punkt af Øen 9^0 10′, findes betydelige Anomalier: Midt paa Vestkysten gaar Deklinationen ned til 7^0, paa Østkysten gaar den op til hen imod 11 ^{0}. Disse Anomalier skyldes Jordbundens Beskaffenhed, der giver Anledning til, at der optræder perturberende Kræfter.

Observationerne paa Bornholms Fastland ere foretagne af Institutets Bestyrer, i Farvandene derom af Marinecapitain Hammer, som Chef for Opmaalingsfartøjet »Krieger«. Disse sidste bleve foretagne fra en jærnfri Flaade, dannet af to ensbyggede Baade, forbundne ved Tværbjælker, paa hvilke der lagdes en Platform til Anbringelse af et fint Pejlkompas og Ophold for Observatorerne; alt Jærn var borttaget fra Baadene, alle For-

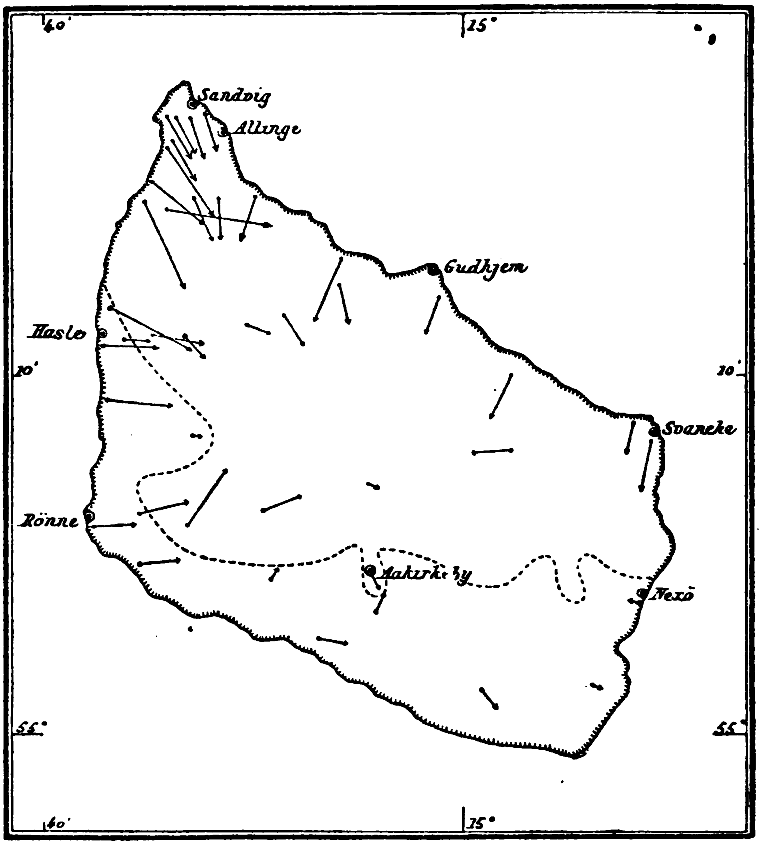


bindelser vare udførte ved Kobber- og Messing-Bolte. Foruden disse Maalinger paa Flaaden foretoges supplerende Maalinger ombord, hvorved Hensyn maatte tages til den Afvigelse (Deviation), Magnetismen i Jærnskroget etc. giver Kompasnaalen. *)

*) Herom henvises til: Misvisnings Undersøgelser ved Bornholms Kyster etc. af R. Hammer, Capitain.

Paa Bornholm har Hr. Adam Paulsen bestemt Deklinationen og Horizontalkomposanten paa 41 og Inklinationen paa 30 Steder.

Af de ved Maalinger bestemte Værdier af de 3 jordmagnetiske Elementer samt af de normale Værdier for disse



er Størrelsen for de perturberende Kræfter beregnet. Ovenstaaende tredje Kort viser Retningen og den relative Størrelse af de perturberende Kræfters horizontale Komposanter.

Middelværdien af disse er 0,0048 (C. G. S.) eller ca. $\frac{1}{37}$ af Værdien for hele den jordmagnetiske Horizontalkomposant paa

Bornholm. Som det ses af Kortet ere disse perturberende Kræfter paa Vest- og Nordostkysten overalt lodrette paa Kyststrækningerne og rettede indad mod Landet, ligesom de ogsaa langs med Kysterne have deres største Værdier. I den sydligste Del af Landet ere disse Kræfter kun smaa; her findes ingen Klippe (Grænsen er betegnet med en punkteret Linie), men de Kræfter, hvis Størrelse er bestemt for Punkter tæt syd for Klippegrænsen, have en Retning ind mod Klippegrunden. Midt paa Øen ere Horizontalkomposanterne for de perturberende Kræfter gennemsnitlig forholdsvis smaa, hvad der jo ogsaa var at vente, eftersom den perturberende Totalkraft her maa antages at have en Retning, der nærmer sig den lodrette mere end langs med Kysterne. Dette stemmer ogsaa med Værdien for den perturberende Totalkrafts Heldningsvinkel, der har sin mindste Værdi ved Kysterne, hvor den paa nogle Steder gaar ned til 18°, medens den i det Indre naar op til 86°.

Heldningsvinklen har i den nordligste Del af Øen en Middelværdi af 69,1°, i den sydligste af 68,5°. Normalt skulde denne Vinkel være 68,3°.

Bornholm virker altsaa saaledes paa Magnetnaalen, at den drager dennes Nordpol til sig; derfor maa ogsaa Deklinationen være anormal lille paa den vestlige Kyststrækning, og omvendt anormal stor mod Øst. I Almindelighed kunne vi sige, at Bornholm har en særlig stor Absorptionsevne for Kraftlinjerne i det jordmagnetiske Felt; derfor er ogsaa Jordmagnetismens Vertikalkomposant gennemsnitlig 0,0058 (C. G. S.) større paa Bornholm end den vilde være det paa samme Sted, naar Jordbunden ikke virkede perturberende paa det jordmagnetiske Felt.

Af disse magnetiske Maalinger er der i Aarbogen for 1892 imidlertid kun givet en Oversigt; en mere indgaaende Behandling, suppleret med nyere Maalinger, vil senere blive optaget i Videnskabernes Selskabs Oversigter.

II. Paa det magnetiske Observatorium, der udgør en Afdeling af det meteor. Institut, og som staar under Hr. cand. mag. Hjorts Ledelse, er der i 1892 gjort ialt 64 absolute Bestemmelser saavel af Deklinationen som af Horizontalkraften samt 85 Bestemmelser af Inklinationen; alle disse Maalinger ere udførte af cand. mag. Hjort. De ere navnlig gjorte for at kontrollere Værdierne af Basislinjerne for de magnetiske Kurver, der fotografisk tegnes af de selvregistrerende magnetiske Variationsinstrumenter. Timeværdierne for Ordinaterne til disse Kurver ere alle for hvert af de 3 jordmagnetiske Elementer (Deklination, Horizontal- og Vertikalkomposanten) reducerede til de tilsvarende absolute Værdier. Det ses heraf, at de magnetiske Forhold have været meget urolige i 1892. Middelværdien af Deklinationsnaalens Amplitude har saaledes været omtrent 20′ daglig. Forskellen mellem den største og mindste Værdi af Horizontalkraften i Løbet af en Dag har gennemsnitlig været 0,0009 (C. G. S.), medens samme Forskel for Vertikalkraftens Vedkommende har været 0,0007 (C. G. S.). Af de særlig rolige magnetiske Dage er den daglige Gang for de enkelte Elementer uddraget. Det ses heraf, at Deklinationen i Kjøbenhavn under rolige Forhold har sit Minimum om Morgenen Kl. 7—8, hvor den er 4½′ mindre end Middelværdien for Døgnet, medens Maksimum indtræder Kl. ca. 1 Eftm., hvor Deklinationen er noget over 6′ større end dens Middelværdi. Afvigelsen er Nul omtrent Kl. 10½ Fm. og 9½ Eftm. Horizontalkomposantens regelmæssige Gang udviser et Minimum omtrent Kl. 11 Fm. paa 0,00028 (C. G. S.) under Middelværdien; Maksimum indtræder Kl. 8—9 Aften med 0,00012 (C. G. S) over Middelværdien. Inklinationsnaalen udfører i sin regelmæssige Gang en daglig Svingning paa 2′. Maksimum falder Kl. 10—11 Fm., Minimum omtrent Kl. 9 Eftm.

Middelværdien for Deklinationen var ved Slutningen af 1892 10° 51′, for Horizontalkraften 0,17337 (C. G. S.) og for Inklinationen 68° 50′. Deklinationen er i 1892 aftaget 6′,

medens Horizontalkraften er vokset 0,00012 (C. G. S.); Inklinationen har ikke kendelig forandret sig.

Det er disse alméninteressante Resultater af de paagældende videnskabelige Arbejder, Red. har ønsket at bringe til Læsernes Kundskab.

Danske Eksamensopgaver.

Landinspektør- og Skovbrugseksamen

Oktober 1893.

1. I den konvekse Sekskant ABCDEF er givet:

Siderne	AB = 1,9876	Diagonalerne	AC = 3,2178
—	CD = 0,8765	—	AD = 2,9943
—	DE = 1,4689	—	DF = 2,1034
—	EF = 0,9877		

samt $\angle$ BAC = $44^0\,7{,}6$, og $\angle$ ADF $39^0\,44{,}4'$.

Bestem Sekskantens Vinkler og Areal.

Opløsning:

I $\triangle$ ABC faas $\log tg\, \frac{1}{2}(B - C) = 0{,}76574 - 1$,

$\frac{1}{2}(B - C) = 30^0\,14{,}8'$, $B = 98^0\,11{,}0'$, $C = 37^0\,41{,}4'$,

$\log T = 0{,}34763$, $T = 2{,}2265$.

I $\triangle$ ACD

$\log tg\, \frac{1}{2} A = 0{,}13928 - 1 \quad A = 15^0\,41{,}6'$

$\log tg\, \frac{1}{2} C = 0{,}82508 - 1 \quad C = 67^0\,31{,}4'$

$\log tg\, \frac{1}{2} D = 0{,}05156 \quad D = 96^0\,47{,}2'$

$\log T = 0{,}11497$

$T = 1{,}3031$

I $\triangle$ ADF

$\log tg\, \frac{1}{2}(F - A) = 0{,}68447 - 1$, $\frac{1}{2}(F - A) = 25^0\,48{,}5'$

$F = 95^0\,56{,}3'$ $A = 44^0\,19{,}3'$, $\log T = 0{,}30390$ $T = 2{,}0133$.

I $\triangle$ DEF

$\log \operatorname{tg} \frac{1}{2} D = 0{,}34339 - 1$	$D = 24^0\,52{,}1'$	$\log T = 0{,}81268 - 1$
$\log \operatorname{tg} \frac{1}{2} E = 0{,}20776$	$E = 116^0\,25{,}2'$	$T = 0{,}6497$
$\log \operatorname{tg} \frac{1}{2} F = 0{,}54568 - 1$	$F = 38^0\,42{,}8'$	

Deraf

$\angle A = 104^0\ 8{,}5'$	$\angle D = 161^0\,23{,}7'$	Sekskantens Areal
$\angle B = 98^0\,11{,}0'$	$\angle E = 116^0\,25{,}2'$	$= 6{,}193.$
$\angle C = 105^0\,12{,}8'$	$\angle F = 134^0\,39{,}1'$	

2. En Skov indeholdt d. 1ste Januar 1893 6000 Favne Brænde; den aarlige Tilvækst anslaas til 1,5 p. C. Hvilken Værdi havde Skovbestanden for 20 Aar siden, og hvilken vil den have om 30 Aar naar der ikke fældes Træer, og hver Favns Værdi ansættes til 9 Kr.?

Hvormange Favne (à 9 Kr.) maa der fældes hver December og sælges den følgende 1ste Januar (første Gang d. 1ste Jan. 1894) for d. 1ste Jan. 1920 (iberegnet Salget denne Gang) af det solgte Brænde at have samlet en Kapital paa 21000 Kr., idet den aarlige Rentefod sættes til 4 p. C., og hvor stor vil Skovens Bestand være d. 1ste Jan. 1920?

Opløsning:

$$x = \frac{6000}{1{,}015^{20}} \cdot 9 = 40093 \text{ Kr.} \qquad \begin{aligned} \log 1{,}015 &= 0{,}0064660 \\ \log x &= 4{,}60307 \\ \log y &= 4{,}92637 \end{aligned}$$

$$y = 6000 \, . \, 1{,}015^{30} \, . \, 9 = 84406 \text{ Kr.}$$

$$z = \frac{1000}{9\,(1{,}04^{27} - 1)} = 58{,}996 \text{ Fvn.} \qquad \begin{aligned} \log 1{,}04 &= 0{,}0170333 \\ 1{,}04^{27} &= 2{,}8834 \\ \log z &= 1{,}77082 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u &= 6000 \, . \, 1{,}015^{27} - \frac{58{,}996}{0{,}015}(1{,}015^{27} - 1) \\ &= (6000 - 3933{,}06) \, . \, 1{,}015^{27} + 3933{,}06 \\ &= 2066{,}94 \, . \, 1{,}015^{27} + 3933{,}06 \\ &= 3089{,}64 + 3933{,}06 = 7022{,}70 \text{ Fvn. Br.} \end{aligned}$$

3. En Prismatoides Endeflader ere en regelmæssig Ottekant og et Kvadrat, hvis Sider ere parallele med og lige store med

fire af Ottekantens Sider, nemlig hver af Længde a. En Kugle, som rørte Endefladerne i deres Centrer, vilde ogsaa røre de fire rektangulære Sideflader.

Søg Legemets Rumfang og Overflade samt find de Vinkler, som Sidefladerne danne med Endefladerne. Hvor stor er Radius til Legemets omskrevne Kugle?

Opløsning: Legemets Højde kaldes h. I et Snit gjennem begge Endefladers Centre og vinkelret paa 4 parallele Kanter, vil man finde en retvinklet Trekant med Højde $\frac{1}{2}$ h paa Hypothenusen, der deles i Stykkerne $\frac{1}{2}$ a og $\frac{1}{2}$ a $\sqrt{2} + \frac{1}{2}$ a, altsaa

$$h = a\sqrt{\sqrt{2}+1}.$$

Nu findes Rumfang

$$V = a^2 h + \frac{2a^2}{\sqrt{2}} h + \frac{h}{3} \cdot a^2 = \frac{a^3}{3}\sqrt{\sqrt{2}+1}\,(4+3\sqrt{2}).$$

Overfladen

$$O = a^2 + (2a^2 + 2a^2\sqrt{2}) + (4a^2 + 2a^2\sqrt{2}) + a^2\sqrt{5+4\sqrt{2}}$$

$$= a^2[7 + 4\sqrt{2} + \sqrt{5+4\sqrt{2}}].$$

Et Rektangels Vinkel x bestemmes ved

$$\cos x = \frac{\frac{a}{\sqrt{2}}}{a+\frac{a}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}-1;\quad x = 65^0\,31{,}8'.$$

En Trekants Vinkel y bestemmes ved

$$\operatorname{tg} y = \frac{\sqrt{\sqrt{2}+1}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{\sqrt{2}+1};\quad y = 72^0\,9{,}7'.$$

Den omskrevne Kugles Centrum ligger paa Linien, der forbinder Endefladernes Centre i Afstanden z fra Kvadratet; man har da for Kuglens Radiet R:

$$R^2 = z^2 + \tfrac{1}{2}a^2 = (h-z)^2 + a^2 + \frac{a^2}{\sqrt{2}}$$

$$z = \frac{h^2 + \frac{1}{2}a^2 + \frac{a^2}{\sqrt{2}}}{2h} = a.\frac{\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{2}}{2\sqrt{\sqrt{2}+1}} = \frac{3}{4}a(\sqrt{2}+1)\sqrt{\sqrt{2}-1}.$$

4. At søge Ligningen for den Kurve, hvoraf hvert Punkt har en Afstand fra Abscisseaxen, der er a større end samme Punkts Afstand fra Punktet (o, b). — Søg Koordinaterne til de Punkter med ovennævnte Egenskab, der ligge paa den rette Linie, hvis Ligning er $3x - 2y + 3a - b = 0$.

Bestem Retningskoefficienten samt Ligningen for Tangenten til Kurven i et almindeligt Punkt af denne. Specielt søges Ligningen for en Tangent, der er parallel med den givne rette Linie.

Opløsning. Man finder Ligningen for Kurven at være

$$x^2 = 2(b - a)\left(y - \frac{b + a}{2}\right).$$

De søgte Punkter blive

$$(b - a, b) \text{ og } [2(b - a), \frac{5}{2} b - \frac{3}{2} a).$$

Retningskoefficienten for Linien gjennem Punkterne (x_1, y_1) og (x_2, y_2) af Kurven bestemmes af

$$5u = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{(y_1 - y_2)(x_1 + x_2)}{x_1^2 - x_2^2} = \frac{(y_1 - y_2)(x_1 + x_2)}{2(b - a)(y_1 - y_2)}$$

$$= \frac{x_1 + x_2}{2(b - a)},$$

altsaa for Tangenten med Røringspunkt (x_1, y_1): $\operatorname{tg} u = \frac{x_1}{b - a}$,

og Ligningen for Tangenten bliver $y + y_1 = \frac{x_1}{b - a} x + b + a$.

Skal Tangenten være parallel med den givne Linie, maa $x_1 = \frac{3}{2}(b - a)$, hvorved Tangentligningen bliver

$$y = \frac{3}{2} x + \frac{13}{8} a - \frac{5}{8} b.$$

Litteratur-Anmeldelse.

Baden og Johnsen: Lærebog i Regning.
Første Del. 1893.

(Brødrene Salmonsens Forlag.)

Medens mange af vore mest anvendte Regnebøger kun maa betragtes som Opgavesamlinger, indeholder Baden og

Johnsens Lærebog i Regning tillige Forklaringer og Anvisninger til Opgavernes Løsning. Forfatterne tvinge herved de Lærere, som ville benytte hans Bog til at holde sig til bestemte Metoder, saa at Undervisningen ikke lider nogen særlig Skade ved, at et Hold Elever faar en »ny Lærer«, ligesom ogsaa Eleverne ville faa mere Respekt for Faget Regning, naar dette kommer ind under de Fag, man skal »læse paa«. Samtidig erstattes den uheldige Metode, at lære Elever Regning rent mekanisk gennem en Mængde omtrent enslydende Eksempler, ved den ulige bedre at lade dem tilegne sig Regnereglerne ved Tænkning, og da Læreren stadigt kan henvise Eleverne til Bogen, kan han ogsaa stille større Fordringer til dem, end naar Forklaringerne kun fremkomme mundtligt.

Saalænge Aritmetik- og Regneundervisningen — desværre — ere adskilte, maa man i Aritmetiken søge de eksakte Beviser for de Sætninger, hvorpaa Regnereglerne ere byggede, og det er derfor korrekt, at Forfatterne af den foreliggende Lærebog ikke have medtaget Beviser for alle de i Bogen nævnte Sætninger, men paa den anden Side ville de Forklaringer, som findes, i Reglen være til stor Nytte.

Nogle Anker kan jeg dog ikke tilbageholde.

De anvendte Definitioner ere ikke altid heldige. At et Tal gaar op i et andet, defineres saaledes ved, at man faar Resten Nul ved at dividere det første ind i det andet. Begrebet »Rest« kan dog næppe forstaas uden Kendskab til Begrebet »Delelighed«. At definere en Brøk ved en Størrelse, som er maalt med en »brudden Enhed«, hvor brudden Enhed betegner en Del (f. Ex. en Syvendedel) af Enheden, er heller ikke heldigt. Forfatterne mene aabenbart hermed at have lettet Eleverne Eorstaaelsen af Brøk, men dette kan Anm. ikke indse. Allerede Navnet »brudden Enhed« er stødende, og da Forf. ved i første Øvelseseksempel i Brøk at gøre Spørgsmaalet: »Hvad er en brudden Enhed, og hvad er en Brøk?« betone, at der er en Forskel, kan Eleven let opfatte denne saaledes, at f. Eks. $\frac{1}{4}$ Pot er en brudden Enhed, medens $\frac{2}{4}$ Pot, $\frac{3}{4}$ Pot .... i Mod-

sætning hertil ere Brøker, skønt $\frac{3}{4}$ Pot = 1 Flaske i det daglige Liv benyttes som Enhed. Unaturligt er det ogsaa, at man i et blandet Tal skal tænke sig det hele Tal og Brøken maalte med forskellige Enheder.

Bogen indeholder følgende Afsnit: Tals Delelighed — Brøk — Decimalbrøk — Proportioner.

I Afsnittet »Tals Delelighed« er uden Bevis angivet de sædvanlige Regler for, naar 2, 3, 4, 5 . . gaa op i et Tal, og tillige medtaget Reglen for 7 og 13. Derimod træffer man mærkeligt nok den ufuldstændige Regel til Undersøgelse af, om et Tal er et Primtal, at man skal dividere med alle Primtal mindre end Halvdelen af Tallet. Forf. nævne de første Primtal op til 61, og i de faa Øvelser i Opløsning af Tal i Primfaktorer som findes i Bogen, (Øvelse 6, Side 5) ere disse Primtal tilstrækkelige. Den fuldstændige Regel burde være medtaget, og saa tillige et Par Eksempler, hvor de forelagte Tal indeholdt Primfaktorer større end de i Bogen opremsede.

I Afsnittet »Decimalbrøk« omtales Decimalsystemet for Længdemaaling og Vægt særligt, ligesom afkortet Multiplikation og Division medtages. Reglerne for Forvandling af periodiske Decimalbrøker findes ogsaa uden Bevis.

Sidste Afsnit: »Proportioner« indeholder de almindeligste Sætninger om Proportioner, enkelt og sammensat Reguladetri, Delingsregning og Blandingsregning.

Ved Opgaverne i Reguladetri medtages helt igennem 3 Løsninger; ved den første benyttes Proportioner, ved den anden sluttes gennem Enheden, og ved den tredje Løsning gaar man ud fra den givne Størrelse, som svarer til den søgte, og ræsonnerer sig til, om den vil vokse eller aftage ved de øvrige givne Bestemmelser. Denne sidste — velkendte — Metode er fremsat paa en lidet tiltalende Maade:

F. Eks.: »Hvormange Alen Tøj væve 8 Vævere i samme Tid som 12 Vævere væve 450 Alen.

Opløsning:

Man sætter x Alen = 450 Alen.

Derefter spørger man: Ville 8 Vævere væve mere eller mindre end 12 Vævere? . . . . . . , altsaa

$$x \text{ Alen} = \frac{450 \times 8}{12}.«$$

Man træffer her en Ligning x Alen = 450 Alen, hvis 2 Led ere uligestore (!) Lighedstegnet bør naturligvis erstattes af et andet Tegn f. Eks. en Tankestreg. Ogsaa den anden Ligning falder i Øjnene; her mangler Benævnelsen paa højre Side. I en anden tidligere Løsning af samme Opgave, mangler denne paa venstre Side.

$$\frac{12}{8} = \frac{450}{x}; \; x = 300 \text{ Alen.}$$

Denne Forsyndelse findes iøvrigt mange Steder i Bogen, saaledes ogsaa i Kapitlet om Decimalbrøk ($x = 14{,}40 \times \frac{13\frac{1}{4}}{12}$; $x =$ Kr. 15,90 . . .), men navnlig træffer man den i næsten alle de løste Opgaver i Reguladetri, saa at Eleverne, hvis de ikke i Tide gøres opmærksomme paa Fejlen, uden Tvivl ville optage denne.

Bortset fra disse Mangler kan Bogen kun paa det bedste anbefales som Hjælpemiddel ved Regneundervisningen, ikke alene paa Grund af dens Stofordning og Indhold, men ogsaa paa Grund af dens mange gode Øvelseseksempler, som øjensynligt med Flid ere hentede fra det praktiske Livs Omraade.

Da Bogen er betegnet som »første Del«, maa man haabe, at Forfatterne i anden Del ville være mere omhyggelige; men de paapegede Fejl lade sig forøvrigt let rette i en anden Udgave, som næppe heller vil udeblive.

(A. S. Bang.)

Løste Opgaver.

181.

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = z\sqrt{2}.$$

$$\sqrt[3]{x^3 + y^3 + z^3} = a(x + y + z).$$

$$\sqrt[n]{x^n + y^n + z^n} = b.$$

Find x, y og z.

Opløsning: Den første Ligning kan skrives:

$$x^2 + y^2 = z^2, \qquad (1)$$

den anden $$x^3 + y^3 + z^3 = a(x + y + z)^3. \qquad (2)$$

Sættes $x + y = v$, $xy = u$, ændres de til

$$v^2 - 2u = z^2 \qquad (3)$$

og $$v^3 - 3vu + z^3 = a^3(v + z)^3. \qquad (4)$$

Af (3) faas $$u = \frac{v^2 - z^2}{2},$$

som indsat i (4) giver

$$2z^3 + 3vz^2 - v^3 = 2a^3(v + z)^3,$$

som deler sig i

$$(v + z)^2 = 0 \text{ og } 2z - v = a^3(v + z). \qquad (5)$$

Den første af disse Ligninger giver $v = -z$, hvorpaa (3) giver $u = 0$, d. v. s. $xy = 0$.

Er f. Ex. $x = 0$, faar man af (1) $y = \pm z$. Vi betragte hvert Tilfælde for sig

1) $x = 0$, $y = z$.

(2) giver $2z^3 = 8a^3z^3$. Er $a^3 = \frac{1}{4}$, er denne Ligning tilfredsstillet, og den sidste af de givne Ligninger giver da

$$y = z = \frac{b}{\sqrt[n]{2}}.$$

Er $a^3 \gtrless \frac{1}{4}$, faar man $y = z = 0$, hvilket kun er muligt, naar $b = 0$.

2) $x = 0$, $y = -z$.

(2) er tilfredsstillet; den tredje, givne Ligning giver for n lige

$$y = -z = \pm\frac{b}{\sqrt[n]{2}};$$

for n ulige er den kun tilfredsstillet, saafremt $b = c$, i hvilket Tilfælde z er ubestemt.

Analoge Opløsninger kunne faas for $y = 0$.

Den anden af Ligningerne (5) giver

$v = \frac{z(2 - a^3)}{1 - a^3}$, hvoraf ved Indsættelse i (3)

$$u = \frac{3(1 - 2a^3)z^2}{2(1 + a^3)^2}.$$

Derpaa faar man

$$\left.\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right\} = \frac{2 - a^3 \pm \sqrt{a^6 + 8a^3 - 2}}{2(1 + a^3)} . z = \left\{\begin{matrix}\beta z,\\ \alpha z\end{matrix}\right.$$

som indsættes i den sidste forelagte Ligning, hvoraf:

$$y = \frac{b}{\sqrt[n]{1 + \alpha^n + \beta^n}}; \; x = \alpha z; \; y = \beta z.$$

(H. C. Olsen.)

182. Træk en Linie i en given Retning, der skærer to givne Linier i X og Y saaledes, at Linierne AX og BY blive parallele, idet A og B ere givne Punkter.

Opløsning: Lad de givne Linier skære hinanden i Punktet P, og ∠ XPY = v. Da Retningen af XY er given, kjender man Forholdet $\frac{PX}{PY}$ og Drejningsvinklen v. Y falder X, B i et bekjendt Punkt B_1. Linierne AX og B_1X danne Vinklen v. Tegner man derfor over AB det Segment, som rummer Vinkel v, vil Buen skjære BX i X. Naar X er bekendt, kan man trække XY. Der bliver 0, 1 eller 2 Løsninger.

(H. C. Olsen.)

183. Givet to Cirkler, paa den ene et Punkt A, paa den anden et Punkt B; bestem paa Cirklerne henholdsvis Punkterne X og Y, saa at Buerne AX og BY blive ligedannede og

²) PX : PY faar en given Størrelse, naar P er et givet Punkt.

³) ∠ PYX faar en given Størrelse (spec. 90°), naar P er et givet Punkt.

⁴) PX : PY faar en given Størrelse, naar P skal falde paa en given Linie, som skal halvere ∠ XPY.

⁵) Linien CD faar en given Længde, idet Linien xy skærer Cirklerne anden Gang henholdsvis i C og D.

Opløsning. Man bestemmer Drejningspunktet O for de to Cirkler saaledes, at A falder i B; X vil da falde i Y. O vil falde i et bekendt Punkt P_1.

[2]) Da $\triangle PXA \sim \triangle P_1YB$, faar man $\frac{P_1Y}{PX} = \frac{P_1B}{PA}$. Hvis det givne Forhold $\frac{PX}{PY} = \frac{p}{q}$, faas $\frac{P_1Y}{PY} = \frac{P_1B}{PA} \cdot \frac{p}{q}$, der er bekendt. Da Forholdene mellem Y's Afstande fra P og P_1 kendes, bestemmes Y let som Skæringspunkt mellem 2 Cirkler (hvoraf den ene er den givne Cirkel gennem B).

[3]) Da $\angle OYX = \angle OBA$ er bekendt og $\angle XYP$ endvidere er givet, kender man altsaa $\angle OYP$ og kan tegne det Segment, der rummer denne Vinkel. Dette Segment skærer den givne Cirkel gennem B i Y.

[4]) P_1 falder nu i en bekendt Linie. Den givne Linie gennem P skærer XY i Z; det dertil svarende Punkt er Z_1. Fra L fældes én vinkelret paa PZ, som den skærer i Q, samt én paa P_1Z_1, som den skærer i Q_1.

Af $\triangle QYZ \sim \triangle Q_1YZ_1$ følger

$$\frac{QY}{Q_1Y} = \frac{ZY}{Z_1Y} = \frac{ZY}{ZX} \cdot \frac{R}{r},$$

idet R og r ere Radierne i de to Cirkler, og da $\angle XPZ = \angle ZPY_1$ har man $\frac{ZY}{ZX} = \frac{PY}{PX}$, altsaa: $\frac{QY}{Q_1Y} = \frac{PY}{PX} \cdot \frac{R}{r}$, som er bekendt. Da man nu kender Forholdet mellem Y's Afstande fra de to bekendte Linier QZ og Q_1Z_1, er det geom. Sted for Y en ret Linie gennem de to Liniers Skæringspunkt; denne Linie skærer den givne Cirkel gennem B i Y.

([2]) til [4]) løst af H. C. Olsen.)

[5]) Diagonalen AA_1 trækkes og derpaa $BB_2 \neq AA_1$. Buerne A_1C og B_2D blive da ligedannede, og Opgaven er reduceret til Opgave 367 i Petersens Meth. og Theorier.

Anden Løsning:

Forlænges Linierne CA, CA_1, DB og DB_1 danne de et Rektangel, da $AC \neq BD$. I dette Rektangel kender man Diagonalen og et Punkt i hver af Siderne (A, A_1, B og B_1).

Forskydes AB parallelt til CM og A_1B_1 parallelt til CN, kan Firkanten CMDN konstrueres, idet først Trekant MCN

konstrueres (af en Vinkel og to hosliggende Sider), hvorpaa D bestemmes som Skæringspunkt mellem to Cirkelbuer.

(S. Bentzon.)
(ogsaa løst af H. C. Olsen.)

191. Bevis følgende Sætnings Rigtighed: Hvis a og b ere indbyrdes primiske Tal, kunne Tallene $(a + b)$ og $(a^2 - ab + b^2)$ ikke have anden fælles Faktor end Tallet 3.

Opløsning. Enhver fælles Faktor for $a + b$ og $a^2 - ab + b^2$ maa gaa op i $(a + b)^2 - (a^2 - ab + b^2) = 3ab$, og da a og b ere indbyrdes primiske, er $a + b$ primisk med saavel a som b, saa at den fælles Faktor gaar op i 3. De givne Størrelser ere derfor enten primiske eller ogsaa have de største fælles Faktor 3.

(Chr. M. A. Østergaard.)

192. Bevis følgende: Hvis Ligningerne

$$ax^2 + 2bx + c = 0, \quad cx^2 + 2bx + a = 0$$

have en fælles Rod, ere deres andre Rødder bestemte ved

$$ac(a + c)(x^2 + 1) + 2b(c^2 + a^2)x = 0.$$

Opløsning. En fælles Rod er ogsaa Rod i den Ligning, man faar ved at subtrahere de givne, altsaa i Ligningen:

$$(a - c)(x^2 - 1) = 0,$$

og da a er forskjellig fra c, da Ligningerne ellers havde begge Rødder fælles, er den fælles Rod ± 1.

Betingelsen herfor er

$$a + c \pm 2b = 0.$$

Kaldes de andre Rødder x_1 og x_2, bliver

$$x_1 = \pm \frac{c}{a}, \quad x_2 = \pm \frac{a}{c},$$

saa at den søgte Ligning er:

$$x^2 \mp \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right)x + 1 = 0$$

eller

$$ac(x^2 + 1) = \pm(c^2 + a^2)x.$$

Multiplicerer man med:

$$a + c = \mp 2b$$

faar man endelig

$$ac(a + c)(x^2 + 1) = -2b(c^2 + a^2)x.$$

(B.)
(Ogsaa løst af H. C. Olsen.)

193. Paa Siden CD af et Parallelogram ABCD vælger man et Punkt E saaledes, at $CE = \frac{1}{n} CD$. Diagonalen AC skærer BE i F. Bevis, at

$$\frac{ADEF}{n^2+n-1} = \frac{AFB}{n^2} = \frac{BFC}{n} = \frac{CFE}{1}.$$

Opløsning.

$$\triangle CEF \sim \triangle ABF; \frac{AF}{CF} = \frac{BF}{EF} = \frac{AB}{CE} = \frac{n}{1}.$$

Da $\triangle$ BCF og $\triangle$ CEF have samme Højde, forholde deres Arealer sig som $\frac{BF}{EF} = \frac{n}{1}$, altsaa $\frac{BCF}{n} = \frac{CEF}{1}$;

analogt faas $\frac{ABF}{n^2} = \frac{BCF}{n}$.

Da $ADEF = ACD - CFE = ABF + BFC - CFE$, altsaa

$$\frac{ABF}{n^2} = \frac{BCF}{n} = \frac{CFE}{1} = \frac{ABF + BCF - CFE}{n^2+n-1} = \frac{ADEF}{n^2+n-1}.$$

(Chr. M. A. Østergaard, A. Willumsen.)

194. Findes der i den naturlige Talrække 100 paa hinanden følgende Tal, hvoraf intet er et Primtal?

Opløsning. Af Tallene fra $P+2$ til $P+101$, hvor P er Produktet af alle Primtal $\leqq 101$, er intet et Primtal. I et vilkaarligt af dem $P+m$ vil nemlig enhver af m's Primfaktorer gaa op. Sætningen gjælder mere almindeligt om n paa hinanden følgende Tal, hvor n er et vilkaarligt helt Tal.

(H. S Nielsen.)
(Ogsaa løst af H. C. Olsen.)

196. Som bekendt kunne to symmetriske uligesidede Trekanter ikke bringes til Dækning alene ved en Bevægelse i deres Plan. Hvorledes kan man nu dele den ene Trekant i tre Dele, saaledes at man dermed kan dække den anden ved Bevægelser i Planen.

Opløsning. Da kongruente ligebenede Trekanter altid kunne bringes til Dækning ved en Bevægelse i Planen, er Opgaven løst, naar man kan dele Trekanten i 3 ligebenede Trekanter, hvilket sker, ved at man trækker Linier fra Trekantens Vinkelspidser til den omskrevne Cirkels Centrum. Denne

Løsning bliver dog ubrugelig, naar Centrum falder udenfor Trekanten, d. v. s. naar denne er stumpvinklet. En anden — altid brugbar — Løsning faar man ved at forbinde den indskrevne Cirkels Centrum med Røringspunkterne. Herved deles Trekanten i 3 selvsymmetriske Firkanter.

(Kr. Fischer.)

(Den første Løsning er ogsaa angivet af H. C. Olsen.)

197. Bevis, at

$$\frac{x}{\sqrt{\frac{1}{2}(1+x^2+y^2)-\sqrt{\frac{1}{4}(1+x^2+y^2)^2-x^2}}} \geqq 1,$$

naar x og y ere reelle Tal.

Opløsning. Størrelsen paa venstre Side ændres til

$$\frac{x}{\sqrt{\frac{\frac{1}{2}(1+x^2+y^2)+x}{2}}-\sqrt{\frac{\frac{1}{2}(1+x^2+y^2)-x}{2}}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+2x+x^2+y^2}+\sqrt{1-2x+x^2+y^2}\right) \geqq$$

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+2x+x^2}+\sqrt{1-2x+x^2}\right) = \begin{cases}1\\x\end{cases},$$

eftersom x er mindre eller større end 1, da $\sqrt{1-2x+x^2}$ skal tages positiv. Da x i sidste Tilfælde er større end eller lig 1, bliver den givne Størrelse i alle Tilfælde større end eller lig 1.

(H. C. Olsen.)

198. Bevis, at en Trekant er ligesidet, naar Radius i den omskrevne Cirkel er dobbelt saa stor som Radius i den indskrevne Cirkel.

Opløsning. Med de sædvanlige Betegnelser faar man

$$\frac{abc}{4T} = 2 \cdot \frac{T}{s} \text{ eller } 8T^2 = abc \cdot s,$$

hvoraf $8(s-a)(s-b)(s-c) = abc,$

som ændres til

$$a^3+b^3+c^3-a^2b-a^2c-ab^2-ac^2-b^2c-bc^2+3abc = 0,$$

som skrives:

$$\frac{1}{2}[(a+b-c)(a-b)^2+(b+c-a)(b-c)^2+(c+a-b)(c-a)^2] = 0.$$

Da hvert Led heri er positivt eller Nul, kan Summe blive Nul, naar hvert af Leddene er Nul, og da a + b -

maa man have $a - b = 0$, og analogt $b - c = 0$, $c - a = 0$, d. v. s. Trekanten er ligesidet.

(H. C. Olsen.)

Anden Opløsning. Lad i Trekant ABC O være den indskrevne Cirkels Centrum. Idet man holder A og B fast og lader C gjennemløbe Buen ACB, vil det geometriske Sted for O være en Cirkelbue over AB som Korde, rummende en Vinkel paa $90 + \frac{C}{2}$ Grader. Det Punkt af denne Bue, som har størst Afstand fra AB er Midtpunktet. Heraf følger, at for Trekant AMB, hvor M er Midtpunktet af Buen AB, vil $\frac{r}{R}$ være større end for Trekant AMB. Vil man derfor bestemme en Trekant, for hvilken $\frac{r}{R}$ er Maksimum, maa 2 og 2 af dens Sider være ligestore, da man ellers som angivet kunde bestemme en Trekant, for hvilken Forholdet var større. Maksimums-Trekanten er ligesidet, og for en saadan er Forholdet $\frac{1}{2}$. I enhver ikke-ligesidet Trekant bliver altsaa $\frac{r}{R} < \frac{1}{2}$, og hermed er Sætningen bevist.

(B.)

Opgaver til Løsning.

199. Hvorledes bestemmes hele Værdier for a og b, for hvilke begge Brøkerne

$$\frac{a^7}{b^5} \text{ og } \frac{b^4}{a^5}$$

blive hele Tal.

200. Naar i en sfærisk Trekant en Vinkel er lig Summen af de to andre Vinkler, vil den plane Trekant med de samme Vinkelspidser som den sfæriske være retvinklet.

(A. S. Bang.)

Nyt

Tidsskrift for Mathematik.

Redigeret

af

cand. mag. **P. T. Foldberg** og dr. phil. **C. Juel.**

Afdeling B.

Fjerde Aargang.

Kjøbenhavn.

Ludvig Jørgensens Bogtrykkeri. Amagertorv 10.

1893.

PUBLIC LIBRARY
83237
ASTOR, LENOX
TILDEN FOUNDATIONS.
1897.
THE N. Y. P. L.

Indhold.

Side

A. S. Bang, cand. mag.
Om en Trediegrads Ligning 57
(Sé ogsaa Opgaver til Løsning.)

F. Bing.
(Sé Opgaver til Løsning.)

T. Bonnesen, stud. mag.
(Sé Opgaver til Løsning og Løste Opgaver.)

C. Crone, dr. phil., Lærer ved Søofficersskolen.
Et Bevis for Eulers Sætning om Polyedre 67

Eduard Göransson.
(Sé Løste Opgaver.)

Carl Heumann.
Bevis för en sats af sannolikhetskalkylens tillämpningar 25

P. Heegaard.
(Sé Løste Opgaver.)

J. M. Iversen, cand. theol.
Nogle Egenskaber ved plane Kurver med Ligningen $r^n = a^n \sin n\theta$ 59
(Sé ogsaa Opgaver til Løsning.)

M. J.
(Sé Løste Opgaver.)

J. L. W. V. Jensen, Ingeniør.
(Sé Opgaver til Løsning.)

C. Juel, dr. phil.
(Sé Opgaver til Løsning, Anmeldelser og Efter fremmede Forf.)

P. A. Larsen, cand. mag.
(Sé Løste Opgaver.)

H. P. Nielsen, stud. mag.
Om Kurver af fjerde Orden, som dække sig selv ved en tredie Del af en hel Omdrejning 30

Side

Niels Nielsen, cand. mag.

Om Potenssummer af hele Tal 1

Grænseværdien for $\sqrt[n]{n}$ 29

Et Dobbeltintegral 81

En Sætning om de cirkulære Funktioner 82

H. C. Olsen, stud. mag.

(Sé Løste Opgaver.)

Magnus Ruben.)

(Sé Løste Opgaver.)

H. G. Zeuthen, dr. phil., Professor ved Universitetet.

Nogle Bemærkninger om Asymptoterne til Kurver bestemte ved en Differentialligning af 1ste Orden 73

J. de Vries, Professor.

(Sé Opgaver til Løsning.)

W. A. Wythoff.

Nouvelles démonstrations d'un theorème de probabilité 77

Løste Opgaver.

12, 23, 24, 25, 28. (P. Heegaard, T. Bonnesen, H. C. Olsen, M. J.) . . 17

26, 5. (P. Heegaard, M. J.) 52

29, 33, 36, 37. (H. S. Nielsen, H. C. Olsen, Magnus Ruben 69

35. (Eduard Göransson) 95

Opgaver til Løsning.

30. (J. L. W. V. Jensen) 24

31—43. (F. Bing, P. A. Larsen, J. L. W. V. Jensen, Iversen, T. Bonnesen Laguerre, C. J.) 53

41. (H. C. Olsen.) 72

Examensopgaver.

Polyteknisk Examen (December 1892) 12

Magisterkonferenser 34

Skoleembedsexamen 42

Litteraturanmeldelser.

F. Gomes Teixeira: Curso de Analyse Infinitesimal 21

C. A. Laisant: Recueil de problèmes des Mathématiques . . .

Revue semestreelle der publications mathématiques redigé par P.

D. J. Korteweg, J. C. Kluyver, W. Kapteyn, P. Zeeman

Side

Annuaire par l'an 1893 51
Émile Picard: Traité d'Analyse II. 68
H. G. Zeuthen: Forelæsning over Mathematikens Historie 81
Codex Leidensis, Euclidis Elementa arabice et latine ediderunt B. O. Besthorn et J. L. Heiberg 92
Jules Tannery et Jules Molk: Élements de la theorie des fonctions elliptiques 93

Efter fremmede Forfattere.

Picards Bevis for at en Differentialligning har et Integral (ved C. J.) . . 10

Meddelelser.

Meddelelse fra det physico-mathematiske Selskab i Kasan 36
Det kongelig Danske Videnskabernes Selskabs mathematiske Prisopgave for 1893 23

Rettelse 96

Om Potenssummer af hele Tal.

Af cand. mag. Niels Nielsen.

I.

1. Idet

$$1)\ s_n^p = 1^p + 2^p + 3^p + \ldots + n^p$$

og 2) $A_{n,p}$ betyder Summen af alle mulige Produkter af Tallene 1, 2, 3 ... n med p Faktorer i hvert Produkt,

har jeg i min »Opgaver i ren Matematik« givet følgende Formler:

$$\left.\begin{aligned} s_n^2 &= \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} \\ s_n^3 &= \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} \\ s_n^3 &= \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4} \\ s_n^4 &= \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^2}{3} - \frac{n}{30} \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} s_n^1 &= \frac{n(n+1)}{2} \\ s_n^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ s_n^3 &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

$$s_n^4 = \frac{1}{5} s_n^2 (6 s_n^1 - 1) \qquad (3)$$

og

$$\frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+p)}{p+1}$$

$$= s_n^p + A_{p-1,1}\, s_n^{p-1} + \ldots A_{p-1\ p-1}\, s_n^1. \qquad (4)$$

(4) udledes let af den umiddelbart indlysende Relation:

$$r(r+1)\dots(r+p-1)$$
$$= r^p + A_{p-1,1}\, r^{p-1} + \dots + A_{p-1,p-1}\, r.$$

2. Ved Hjælp af (1) og (4) kan man da ved Induktion bevise følgende Grundrelation:

$$s_n^p = a_{p+1}^0 n^{p+1} + a_{p+1}^1 n^p + a_{p+1}^2 n^{p-1} + \dots + a_{p+1}^p n, \quad (5)$$

hvor Koefficienterne a_{p+1} alene afhænger af p, og deres Nævnere er kun delelige med Primfaktorer mindre end eller lig med $p+1$.

3. Idet $nh = x$ faas af (5) som det er vist i min »Opgaver i ren Matematik«:

$$\lim_{n=\infty} [h(h^p + (2h)^p + (3h)^p + \dots (nh)^p)] = \frac{x^{p+1}}{p+1} \quad (6)$$

4. Lad os for Kortheds Skyld betegne Polynomiet paa højre Side af (5) med $F_p(n)$; altsaa:

$$s_n^p = F_p(n),$$

da faas umiddelbart:

$$F_p(n) + (n+1)^p = F_p(n+1),$$

altsaa af (5):

$$s_n^p = a_{p+1}^0 (n+1)^{p+1} + (a_{p+1}^1 - 1)(n+1)^p + \dots + a_{p+1}^p (n+1). \quad (7)$$

Dersom det hele rationale Polynomium $f(x)$, ved at multipliceres med Faktorer uafhængige af x, er deleligt med et andet helt og rationalt Polynomium $g(x)$, vil vi kort udtrykke dette saaledes:

$$f(x) \equiv 0 \; [\text{mod } g(x)],$$

hvor den firkantede Parentes skal tjene til Skælnemærke fra Gauss's Kongruensbetegnelse.

Af (5) faas da:

$$s_n^p \equiv 0 \; [\text{mod } n].$$

Og af (7):

$$s_n^p \equiv 0 \; [\text{mod } n+1].$$

Da n og $n+1$ er indbyrdes primiske Polynomier i n, faas

$$F_p(n) \equiv 0 \; [\text{mod } F_1(n)] \quad (8)$$

5. Idet n er et Primtal større end 5, faas umiddelbart af (1):

$$s_n^1 \equiv s_n^2 \equiv s_n^3 \equiv s_n^4 \equiv 0 \; (\text{mod } n).$$

Under den Forudsætning, at n er et Primtal større end $p+1$ bevises da ved Induktion ved Hjælp af (4):

$$s_n^p \equiv 0 \pmod{n} \qquad (9)$$

og altsaa ogsaa:

$$s_{n-1}^p \equiv 0 \pmod{n}. \qquad (10)$$

Dersom n er et Primtal og $n = p+1$, faas af (4) ved denne Betragtningsmaade et Bevis for Wilsons Sætning ved Hjælp af Fermats.

6. Af Newtons Formler faas:

$$s_n^p - A_{n,1}\, s_n^{p-1} + A_{n,2}\, s_n^{p-2} - \ldots$$
$$+ (-1)^{p-1} A_{n,p-1}\, s_n^1 + (-1)^p\, p\, A_{n,p} = 0 \qquad (11)$$
$$s_{n-1}^p - A_{n-1,1}\, s_{n-1}^{p-1} + A_{n-1,2}\, s_{n-1}^{p-2} - \ldots$$
$$+ (-1)^{p-1} A_{n-1,p-1}\, s_{n-1}^1 + (-1)^p\, p\, A_{n-1,p} = 0 \qquad (12)$$

Dersom altsaa n er et Primtal større end $p+1$, faas af (9) og (10):

$$A_{n,p} \equiv 0 \pmod{n} \qquad (13)$$

og

$$A_{n-1,p} \equiv 0 \pmod{n}. \qquad (14)$$

Ved Hjælp af (14) kan man, som det er vist i Opg. 303 i min »Opgaver i ren Matematik«, samtidig bevise baade Fermats og Wilsons Teoremer.

7. Af Formlen (11) ses ved en Induktion, at $A_{n,p}$ udtrykkes ved et helt, rationalt Polynomium i n af Graden 2p. Lad os kalde dette Polynomium for $f_p(n)$, da faas af (8) og (11):

$$f_p(n) \equiv 0 \; [\text{mod } F_1(n)]. \qquad (15)$$

Koefficienten til den højeste Potens af n i $f_p(n)$ ses af (11) at blive: $\frac{1}{2^p \cdot p!}$.

II.

8. Vi antager som før, at n er et Primtal og $n - 1 < 2p$. Leddene i $A_{n-1,2p}$ kan da deles i to Grupper:

1) Led, der kan skrives paa Formen:

$$a_1 a_2 \ldots a_p (n - a_1)(n - a_2) \ldots (n - a_p),$$

2) Led, der ikke kan skrives paa denne Form.

Lad et Led i den sidste Gruppe være $a_1 a_2 \ldots a_{2p}$; der maa da i dette Led findes i det mindste 1 Faktor f. Ex. a_r, saaledes at $n - a_r$ ikke tillige forekommer som Faktor i det samme Led.

I $A_{n-1, 2p}$ maa der da være et andet Led, kun forskelligt fra $a_1 a_2 \ldots a_{2p}$, ved at a_r er erstattet med $n - a_r$. To saadanne Led vil vi kalde konjugerede. Danner vi nu $2 A_{n-1, 2p}$, saaledes at vi adderer de konjugerede Led til hinanden, ser man strax, at Summen af to saadanne er delelig med n. Tilbage bliver da kun Leddene i den første Gruppe, hvert taget to Gange.

Nu har man:

$$a_1 a_2 \ldots a_p (n - a_1)(n - a_2) \ldots (n - a_p)$$
$$\equiv (-1)^p a_1^2 a_2^2 \ldots a_p^2 \pmod{n}.$$

Altsaa faas af (14):

$$\Sigma a_1^2 a_2^2 \ldots a_p^2 \equiv 0 \pmod{n}, \qquad (16)$$

hvor Summationen skal udstrækkes til alle Tal mindre end n.

9. Vi antager stadig, at n er et Primtal, større end $2p + 1$. Adderer vi saa de konjugerede Led i $A_{n-1, 2p+1}$, faas:

$$2 A_{n-1, 2p+1} = n \cdot Q,$$

hvor Q er en Sum af Led, der alle indeholder 2p Faktorer.

Behandler vi nu Q paa samme Maade som før $A_{n-1, 2p}$ faas ifølge (16):

$$Q \equiv 0 \pmod{n}.$$

Altsaa, under de Forbehold, vi har taget med Hensyn til p og n:

$$A_{n-1, 2p+1} \equiv 0 \pmod{n^2}. \qquad (17)$$

10. Leddene i $A_{n, 2p+1}$ kan deles i to Grupper nemlig dem, der indeholder n som Faktor, og dem, der ikke gør det.

Af (17) og (14) faas da:

$$A_{n, 2p+1} \equiv 0 \pmod{n^2}. \qquad (18)$$

Ved Hjælp af Newtons Formler faas da:

$$s_n^{2p+1} \equiv 0 \pmod{n^2}. \qquad (19)$$

11. Koefficienten a_{2p+2}^{2p+1} i Udviklingen for s_n^{2p+1} maa være 0.

Af (5) og (9) ses, idet n er et Primtal større end p + 1, at

$$a^{0}_{2p+2}\, n^{2p+1} + a^{1}_{2p+2}\, n^{2p} + \ldots + a^{2p}_{2p+2}\, n + a^{2p+1}_{2p+2}$$

maa være et helt Tal, og i Følge (19) maa det yderligere være deleligt med n.

Lad os nu sætte:

$$a^{2p+1}_{2p+2} = \frac{\alpha}{\beta \cdot \varepsilon}$$

og $$a^{0}_{2p+2}\, n^{2p+1} + a^{1}_{2p+2}\, n^{2p} + \ldots + a^{2p}_{2p+2}\, n = \frac{\nu}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot n,$$

hvor δ og β er indbyrdes primiske, og begge saavel som ε kun delelige med Primfaktorer $< 2p + 1$, altsaa i hvert Fald mindre end n.

Brøken $$\frac{\delta \cdot \alpha + \beta \cdot \nu \cdot n}{\beta \cdot \delta \cdot \varepsilon}$$

skal da være et helt Tal deleligt med n, Tælleren maa da ogsaa være det. Det vil sige:

$$\delta \cdot \alpha \equiv 0 \pmod{n}.$$

Tallene α, β, δ, ε afhænger alene af p, og Primtallet n kan vi gøre saa stort det skal være (blot det er større end $2p + 1$), altsaa kan vi gøre n større end baade δ og α; α maa da være 0, da δ som Faktor i en Nævner ikke kan være det.

Altsaa $$a^{2p+1}_{2p+2} = 0. \qquad (20)$$

12. Man faar da let:

$$F_{2p+1}(n) \equiv 0 \; [\text{mod } F_3(n)] \qquad (21)$$

og $$f_{2p+1}(n) \equiv 0 \; [\text{mod } F_3(n)]. \qquad (22)$$

13. Vi har tidligere set, at $A_{n,p}$ udtrykkes ved et helt rationalt Polynomium i n af Graden 2p.

For $n = 0, 1, 2, 3, \ldots p - 1$, maa $A_{n,p}$ blive 0; altsaa:

$$A_{n,2p} = (n + 1)\, n\, (n - 1) \ldots (n - 2p + 1)\, g_{2p-1}(n)$$

og $$A_{n,2p+1} = (n + 1)^2\, n^2\, (n - 1) \ldots (n - 2p)\, h_{2p-2}(n),$$

hvor g og h er to rationale (rimeligvis irreduktible) Polynomier af en Grad i n lig deres Index.

14. Af Formlen (3) ses at:

$$F_4(n) \equiv 0 \; [\text{mod } F_2(n)].$$

Vi vil nu bevise den almindelige Sætning:

$$F_{2p}(n) \equiv 0 \text{ [mod } F_2(n)]. \qquad (23)$$

I Følge (8) er det altsaa tilstrækkeligt at bevise:

$$F_{2p}(n) \equiv 0 \text{ [mod } 2n + 1]$$

eller med andre Ord:

$$F_{2p}(-\tfrac{1}{2}) = 0. \qquad (24)$$

Idet vi for Kortheds Skyld sætter

$$b_{2p} = (-1)^p \Sigma a_1^2 a_2^2 \ldots a_p^2,$$

hvor Summationen skal udstrækkes til alle Tallene 1, 2, 3 . . n, faas:

$$s_n^{2p+2} + b_2 s_n^{2p} + b_4 s_n^{2p-2} + \ldots + b_{2p} s_n^2 + (p+1) b_{2p+2} = 0. \quad (25)$$

Antag nu, at man havde:

$$s_n^{2p} \equiv s_n^{2p-2} \equiv \ldots \equiv s_n^4 \equiv 0 \text{ [mod } 2n+1]$$

altsaa: $F_{2p}(-\tfrac{1}{2}) = F_{2p-2}(-\tfrac{1}{2}) \ldots = F_4(-\tfrac{1}{2}) = 0. \quad (26)$

Da Relationen, vi skal bevise, alene er en Egenskab ved Koefficienterne i F_{2p+2}, kan vi tillægge n hvilken Værdi det skal være, altsaa f. Ex. antage $n = p - 1$, da faas af (25):

$$s_{p-1}^{2p+2} + b_2 s_{p-1}^{2p} + \ldots + b_{2p-2} s_{p-1}^4 = 0$$

eller i Følge (26):

$$F_{2p+2}(-\tfrac{1}{2}) = 0.$$

Og den almengyldige Relation i (23) er bevist.

15. Formlen i (21) lærer os, at Summen af de ulige Potenser af Talrækkens n første Tal ved at multipliceres med Tal, der alene afhænger af Exponenten altsaa er uafhængige af n, vil være delelig med Summen af de n første Kubiktal.

Formlen i (23) give os en analog Sætning for Summen af lige Potenser af de n første Tal og Summen af de n første Kvadrattal.

III.

16. Af den umiddelbart indlysende Formel:

$$F_p(n-1) + n^p = F_p(n)$$

kan der dannes et System af Ligninger til Bestemmelse af Koefficienterne a_{p+1}.

Udvikler vi nemlig begge Sider efter Binomialformlen ved Hjælp af (5), faas:

$$
\begin{aligned}
-\binom{p+1}{1} a^0_{p+1} &= -1 \\
\binom{p+1}{2} a^0_{p+1} - \binom{p}{1} a^1_{p+1} &= 0 \\
-\binom{p+1}{3} a^0_{p+1} + \binom{p}{2} a^1_{p+1} - \binom{p-1}{1} a^2_{p+1} &= 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
(-1)^{r+1}\binom{p+1}{r+1} a^0_{p+1} + (-1)^r \binom{p}{r} a^1_{p+1} + \ldots + \binom{p-r+2}{2} a^{r-1}_{p+1} & \\
-\binom{p-r+1}{1} a^r_{p+1} &= 0.
\end{aligned}
\tag{27}
$$

17. Af (27) findes følgende Værdier for de første Koefficienter:

$$
\begin{aligned}
a^0_{p+1} &= \frac{1}{p+1} \\
a^1_{p+1} &= \frac{1}{2} \\
a^2_{p+1} &= \frac{p}{12} \\
a^3_{p+1} &= 0 \\
a^4_{p+1} &= -\frac{p(p-1)(p-2)}{6!} \\
a^5_{p+1} &= 0 \\
a^6_{p+1} &= \frac{p(p-1)\ldots(p-4)}{6.7!} \\
a^7_{p+1} &= 0 \\
a^8_{p+1} &= -\frac{3}{10!}\, p(p-1)\ldots(p-6) \\
a^9_{p+1} &= 0 \\
a^{10}_{p+1} &= \frac{5}{6}\,\frac{1}{11!}\, p(p-1)\ldots(p-8) \quad \text{o. s. v.}
\end{aligned}
\tag{28}
$$

18. Altsaa faas:

$$s^1_n = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$$

$$s^2_n = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$$

$$s_n^3 = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4}$$

$$s_n^4 = \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30}$$

$$s_n^5 = \frac{n^6}{6} + \frac{n^5}{2} + \frac{5n^4}{12} - \frac{n^2}{12}$$

$$s_n^6 = \frac{n^7}{7} + \frac{n^6}{2} + \frac{n^5}{2} - \frac{n^3}{6} + \frac{n}{42}$$

$$s_n^7 = \frac{n^8}{8} + \frac{n^7}{2} + \frac{7n^6}{12} - \frac{7n^4}{24} + \frac{n^2}{12}$$

$$s_n^8 = \frac{n^9}{9} + \frac{n^8}{2} + \frac{2n^7}{3} - \frac{7n^5}{15} + \frac{2n^3}{9} - \frac{n}{30}$$

$$s_n^9 = \frac{n^{10}}{10} + \frac{n^9}{2} + \frac{3n^8}{4} - \frac{7n^6}{10} + \frac{n^4}{2} - \frac{3n^2}{20}$$

$$s_n^{10} = \frac{n^{11}}{11} + \frac{n^{10}}{2} + \frac{5n^9}{6} - n^7 + n^5 - \frac{n^3}{2} + \frac{5n}{66}$$

o. s. v.

19. Af (11) udledes derpaa:

$$A_{n,1} = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$A_{n,2} = \frac{(n-1)\,n\,(n+1)\,(3n+2)}{2^3 \cdot 3}$$

$$A_{n,3} = \frac{(n-2)\,(n-1)\,n^2\,(n+1)^2}{2^4 \cdot 3}$$

$$A_{n,4} = \frac{(n-3)\,(n-2)\,(n-1)\,n(n+1)}{2^7 \cdot 3^2 \cdot 5}\,(15n^3 + 15n^2 - 10n - 8)$$

$$A_{n,5} = \frac{(n-4)\,(n-3)\,(n-2)\,(n-1)\,n^2\,(n+1)^2}{2^8 \cdot 3^2 \cdot 5}\,(3n^2 - n - 6)$$

o. s. v.

20. Af (28) og den $r + 1^{te}$ Ligning i (27) bevises let ved Induktion:

$$a_{p+1}^r = A_r\, p\,(p-1)\,(p-2)\ldots(p-r+2), \qquad (29)$$

hvor A_r er en Koefficient, der er uafhængig af p og alene afhænger af r.

21. Man har:

$$F_p(1) = 1$$

og

$$F_p(-1) = 0.$$

Altsaa: $1 = a^0_{p+1} + a^1_{p+1} + a^2_{p+1} + \ldots + a^p_{p+1}$

$$0 = a^0_{p+1} - a^1_{p+1} + a^2_{p+1} + \ldots (-1)^p a^p_{p+1}$$

eller: $$\frac{1}{2} = a^0_{p+1} + a^2_{p+1} + a^4_{p+1} + \ldots$$

$$\frac{1}{2} = a^1_{p+1} + a^3_{p+1} + a^5_{p+1} + \ldots$$

Men $a^1_{p+1} = \frac{1}{2}$; altsaa:

$$0 = a^3_{p+1} + a^5_{p+1} + a^7_{p+1} + \ldots \tag{30}$$

22. Idet $r > 0$ haves almindelig:

$$a^{2r+1}_{p+1} = 0. \tag{31}$$

Lad os nemlig antage:

$$a^3_{p+1} = a^5_{p+1} = \ldots = a^{2r-1}_{p+1} = 0. \tag{32}$$

Den første Potenssum, der kan indeholde a^{2r+1}_{p+1}, er s^{2r+2}_n
Af (30) og (32) faas da:

$$a^{2r+1}_{2r+3} = 0.$$

Men $a^{2r+1}_{2r+3} = A_{2r+1}(2r+3)(2r+2)\ldots 4$.
Altsaa: $A_{2r+1} = 0$, eller (31) er almengyldig.

23. (31) bevises lettere saaledes:
Vi beviste i (20):

$$a^{2p+1}_{2p+2} = 0.$$

Af (29) faas da umiddelbart:

$$A_{2p+1} = 0.$$

24. Vi har altsaa bevist, at

$$1^p + 2^p + 3^p + \ldots (n-1)^p + \frac{1}{2} n^p$$

udtrykkes ved et lige eller et ulige Polynomium i n, eftersom p er ulige eller lige.

IV.

25. Løses Ligningerne i (27) ved Determinant for ulige r:

$$\begin{vmatrix} \binom{p+1}{2} & \binom{p}{1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \binom{p+1}{3} & \binom{p}{2} & \binom{p-1}{1} & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \binom{p+1}{r} & \binom{p}{r-1} & \binom{p-1}{r-2} & \dots & & \binom{p-r+2}{1} \\ \binom{p+1}{r+1} & \binom{p}{r} & \binom{p-1}{r-1} & \dots & & \binom{p-r+2}{2} \end{vmatrix} = 0.$$

I Determinanten, vi oprindelig fik, har vi skiftet Tegn for hveranden Søjle og derpaa for hveranden Række.

26. Danner vi ved Hjælp af (29) og (27) Ligninger for A_r, faas paa samme Maade som før, idet r er u l i g e:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2!} & \frac{1}{1!} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & \frac{1}{1!} & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{r!} & \frac{1}{(r-1)!} & \frac{1}{(r-2)!} & \dots & & \frac{1}{1!} \\ \frac{1}{(r+1)!} & \frac{1}{r!} & \frac{1}{(r-1)!} & \dots & & \frac{1}{2!} \end{vmatrix} = 0.$$

(Oktbr. 1884.)

Picards Bevis for, at en Differentialligning har et Integral. *)

Vi ville her kun betragte en Differentialligning af 1ste Orden

$$\frac{dy}{dy} = f(x, y). \tag{1}$$

Funktionen f (x, y) forudsættes at være en reel og kontinuert Funktion af de reelle Variable x og y, der i et vist

*) Ovenstaaende Bevis af Picard er en Omskrivning af dennes almindelige Bevis i traité d'Analyse II, S. 301, for det Tilfælde, hvor der kun findes 1 uafhængig Variabel. Det er let at sé, at Beviset er simplere end et lignende af Cauchy derved, at en Række Summationer her strax ere erstattede ved en Integration — det forudsætter paa den Maade ogsaa noget mere, men det er i højeste Grad overskueligt.

(C. J.)

Omraade $(x_0 - a,\ x_0 + a)\ (y_0 - b,\ y_0 + b)$, hvor a og b ere positive Tal, bevæger sig mellem endelige Grænser.

Yderligere forudsættes det, at man kan bestemme en positiv Konstant A saaledes, at

$$|f(x, y') - f(x, y)| < A\,|y' - y|, \tag{2}$$

naar de Variable befinde sig i det ovenfor angivne Omraade.

Denne sidste Betingelse er af en meget almindelig Karakter, og er i hvert Fald tilfredsstillet, naar $f(x, y)$ i Intervallet har en bestemt partiel Differentialkvotient med Hensyn til y, der ikke overskrider en ny endelig Grænse.

Man danner nu følgende Række

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = \int_{x_0}^{x} f(x, y_0)\,dx + y_0, \quad y_2 = \int_{x_0}^{x} f(x, y_1)\,dx + y_0 \\ \quad \ldots\ldots\ y_m = \int_{x_0}^{x} f(x, y_{m-1})\,dx + y_0 \end{array}\right\} \tag{3}$$

og viser, at de herved bestemte y, naar m voxer i det uendelige, ville konvergere med en bestemt Grænse.

Naar i Intervallet $(x_0 - \varrho,\ x_0 + \varrho)$, hvor $\varrho \leqq a$, M er større end det absolute Maximum af $f(x, y)$, har man

$$|y_1 - y_0| < M\varrho. \tag{4}$$

Dersom ϱ altsaa bestemmes saaledes, at $M\varrho < b$, vil y_1 ligge i det oprindelige Interval, og det samme sés at gjælde om alle de følgende y.

Vi antage dernæst, at x ligger i et Interval $(x_0 - \frac{\delta}{2},\ x_0 + \frac{\delta}{2})$, der er indbefattet i det sidstnævnte. Sættes da $y_m - y_{m-1} = Y_m$, har man

$$\frac{dY_m}{dx} = f(x, y_{m-1}) - f(x, y_{m-2}).$$

Ifølge (2) kan man heraf slutte

$$|Y_m| < A\delta\,|Y_{m-1}|,$$

altsaa, da efter (4) $|Y_1| < M\delta$,

$$|Y_2| < A\delta \,.\, M\delta;\ |Y_3| < (A\delta)^2 M\delta$$

$$\ldots |Y_m| < A^{m-1}\,\delta^{m-1} M\delta.$$

Men da

$$y_m = y_0 + Y_1 + Y_2 + \ldots Y_m$$

ses y_m at nærme sig en bestemt Grænse, naar δ vælges saa lille, at $A\delta < 1$.

Naar altsaa δ vælges som den mindste af Størrelserne a, $\frac{b}{M}, \frac{1}{A}$, vil i Intervallet $(x_0 - \frac{\delta}{2}, x_0 + \frac{\delta}{2})$ Funktionen y defineres ved en Række, hvis Moduler konvergere mindst som en Kvotientrække, og derfor være en ligelig kontinuert Funktion af x (hvilket sés ved at betragte Rækkens Rest).

Men nu har man

$$y_m = \int_{x_0}^{x} f(x, y_{m-1})\, dx + y_0,$$

og da y_m i det angivne Omraade afviger lige saa lidt fra sin Grænse, som man selv vil ved at lade m voxe, maa man have

$$y = \int_{x_0}^{x} f(x, y)\, dx + y_0$$

eller

$$\frac{dy}{dy} = f(x, y).$$

At i Intervallet tillige $y = y_0$ svarer til $x = x_0$, følger umiddelbart af Integralets Form.

Danske Examensopgaver.

Polyteknisk Examen.

December 1892.

Kemikere.

1. Find de Værdier af x og y, som gjøre Funktionen

$$u = xy + \frac{a^3}{x} + \frac{a^3}{y},$$

hvor a er en Konstant, til et Maximum eller et Minimum.

2. At udføre Integrationen

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^6 x\, dx.$$

Opløsning. 1. Man har:

$$\frac{du}{dx} = y - \frac{a^3}{x^2},\ \frac{du}{dy} = x - \frac{a^3}{y^2},\ \frac{d^2u}{dx^2} = \frac{2a^3}{x^3},$$

$$\frac{d^2u}{dy^2} = \frac{2a^3}{y^3},\ \frac{d^2u}{dx\,dy} = 1.$$

Af Ligningerne

$$\frac{du}{dx} = 0,\ \frac{du}{dy} = 0,$$

findes: $x = y = a,$

og for disse Værdier faas:

$$\frac{d^2u}{dx^2} = 2,\ \frac{d^2u}{dy} = 2,\ \left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)^2 - \frac{d^2u}{dx^2}\cdot\frac{d^2u}{dy^2} = -3,$$

saa at Værdierne $x = y = a$ svare til Minimum af u.

2. Man har:

$$\sin^6 x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^6$$

$$= \frac{e^{6ix} - 6e^{4ix} + 15e^{2ix} - 20 + 15e^{-2ix} - 6e^{-4ix} + e^{-6ix}}{-2^6}$$

$$= -\frac{1}{2^5}(\cos 6x - 6\cos 4x + 15\cos 2x - 10).$$

$$\int \sin^6 x\,dx = -\frac{1}{2^5}\left(\frac{\sin 6x}{6} - \frac{3}{2}\sin 4x + \frac{15}{2}\sin 2x - 10x\right) + C.$$

Ved Grændsernes Indsættelse findes:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^6 x\,dx = \frac{-44 + 15\pi}{192}.$$

Ingeniører.

I.

1. Hvilke Værdier af α gjøre

$$u = \int_\alpha^{2\alpha} e^{-x^2}\,dx$$

til et Maximum eller et Minimum?

2. At integrere den partielle Differentialligning

$$(xz - xy)\frac{dz}{dx} + (xy - yz)\frac{dz}{dy} = yz - xz.$$

Opløsning. 1. Man har

$$\frac{du}{d\alpha} = 2e^{-4\alpha^2} - e^{-\alpha^2}, \quad \frac{d^2u}{d\alpha^2} = -2\alpha e^{-\alpha^2}(8e^{-3\alpha^2} - 1).$$

Af $\frac{du}{d\alpha} = 0$ findes

$$\alpha = \pm\sqrt{\frac{l.2}{3}}.$$

Den positive Værdi af α gjør u til et Maximum, den negative til et Minimum.

2. Hjælpeligningerne ere:

$$\frac{dx}{zx - xy} = \frac{dy}{xy - yz} = \frac{dz}{yz - xz}.$$

Heraf udledes dels:

$$dx + dy + dz = 0, \quad x + y + z = c_1,$$

dels:

$$\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} + \frac{dz}{z} = 0, \quad xyz = c_2.$$

Det almindelige Integral er da:

$$x + y + z = \varphi(xyz).$$

II.

En Flade frembringes af en foranderlig Ellipse. Ellipsen har sit Centrum i Begyndelsespunktet af et retvinklet Koornatsystem, sin konstante, store Axe 2a paa z-Axen; Ellipsen skal stadig skære den Cirkel, hvis Ligninger ere

$$z = 0, \quad x^2 + y^2 = ax.$$

Find Fladens Ligning og Størrelserne af de Voluminer, som Fladen indeslutter.

Opløsning. Naar Ellipsen i en vilkaarlig af sine Stillinger, hvor dens Plan danner Vinklen θ med XZ-Planet, henføres til et Koordinatsystem, hvis Axer ere Z-Axen og Ellipseplanets Skæringslinie med XY-Planet, og naar løbende Koordinater i dette System kaldes z og R, saa er Ellipsens Ligning:

$$\frac{z^2}{a^2} + \frac{R^2}{a^2 \cos^2 \theta} = 1.$$

Her er:

$$R^2 = x^2 + y^2, \quad \cos^2 \theta = \frac{x^2}{x^2 + y^2}.$$

Fladens Ligning er da:

$$(x^2 + y^2)^2 = x^2 (a^2 - z^2).$$

Et Plan parallelt med XY-Planet i Afstanden z derfra vil skære Fladen i to Cirkler med Radier $\frac{1}{2} \sqrt{a^2 - z^2}$. Fladen bestaar af to lukkede Dele, som berøre hinanden langs z-Axen. Disse to Dele have ligestore Voluminer; hvert Volumen isæ bliver lig med:

$$V = \int_0^a \frac{1}{2} \pi (a^2 - z^2)\, dz = \frac{\pi a^3}{3}.$$

III.

En tung, homogen, ret Linie med Masse m og Længde 2a kan uden Modstand dreje sig i et lodret Plan om sit Midtpunkt, som er fast. Til en Begyndelse er Linien i Hvile i vandret Stilling. En tung Partikel med Masse m falder lodret ned mod Liniens Endepunkt med Hastigheden u og hæfter sig fast til Linien.

Man skal

1) finde Længden af det simple Pendul, som svinger paa samme Maade, som det af Linien og Partiklen dannede System,

2) beregne den Vinkelhastighed, som Systemet har, efterat have drejet sig gjennem 90°,

3) finde Betingelsen for, at Bevægelsen stadig fortsættes i den samme Omløbsretning.

4) Dersom Forbindelsen mellem Linien og Partiklen ophører, naar Systemet har beskrevet de første 90°, hvorledes vil da Linien bevæge sig videre, og hvilken bliver Ligningen for Partiklens fremtidige Bane?

Opløsning. Bevægelsen bestemmes ved Ligningen

$$\Sigma \mu \left(x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{d t^2}\right) = \Sigma (Yx - Xy).$$

Det faste Punkt tages til Begyndelsespunkt; X-Axen lægges vandret, Y-Axen lodret nedad.

$$x = r \cos \theta. \quad y = r \sin \theta.$$

Derved faas: $\dfrac{d^2 \theta}{dt^2} = \dfrac{g \cos \theta}{\frac{4}{3} a}.$

Den reducerede Pendullængde er derfor $\frac{4}{3}$ a.

Integration giver derefter:

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{3g}{2a} \sin \theta + C.$$

Begyndelsesværdien ω af $\dfrac{d\theta}{dt}$ findes af Ligningen:

$$m \frac{a^2}{3} \omega + m a^2 \omega = m a u, \quad \omega = \frac{3u}{4a}.$$

Derved bestemmes C, og man faar:

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right) = \frac{3g}{2a} \sin \theta + \frac{9u^2}{16a^2}.$$

For $\theta = 90^0$ faas:

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{3g}{2a} + \frac{9u^2}{16a^2}.$$

Skal Bevægelsen fortsættes i samme Omløbsretning, maa man have:

$$-\frac{3g}{2a} + \frac{9u^2}{16a^2} \geq 0, \quad u^2 \geq \frac{8ga}{3}.$$

Dersom Forbindelsen ophører, naar $\theta = 90^0$, gaar Linien videre med Vinkelhastigheden

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{3g}{2a} + \frac{9u^2}{16a^2}},$$

Punktets Bane faar Ligningen:

$$y = \tfrac{1}{2} g \frac{x^2}{a^2 \omega_0^2} + a.$$

Løste Opgaver.

12. I en fuldstændig Firkant indskreven i en Cirkel, forbindes Midtpunkterne af de tre Par modstaaende Sider. Bevis, at de Vinkler, disse Linjer danne indbyrdes, ere lig Vinklerne i den Trekant, hvis Vinkelspidser ere Skæringspunkterne mellem de modstaaende Sider.

(A. S. Bang).

Opløsning. Lad Diagonalpunktstrekanten være ABC, og lad A_1 og A_2 være Midtpunkterne af de Sider, der gaa gennem A, og lad endelig A_3 være Midtpunktet af BC, som da vil ligge paa ret Linie med A_1 og A_2; B_1, B_2 o. s. v. have analoge Betydninger. Linierne $(A_1 A_2 A_3) \equiv a$, $(B_1 B_2 B_3) \equiv b$ og $(C_1 C_2 C_3) \equiv c$ gaa gennem det samme Punkt o, som (Tidsskrift for Math. 1885, p. 55) er Centrum for en ligesidet Hyperbel, der gaar gennem A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, A, B og C. BC hører til et Kordesystem, hvis Diameter er a; analogt for de andre Sider i ABC. Men da Vinklen mellem to konjugerte Diametre halveres af Asymptoterne, bliver Vinklen mellem to Diametre lig Vinklen mellem de tilsvarende konjugerte Diametre, hvorved Sætningen er bevist.

(P. Heegaard.)

23. P er et Punkt af en Trekants omskrevne Cirkel, H Højdernes Skæringspunkt. Vis, at Projektionerne af P paa de 3 Sider og Midtpunktet af PH ligge paa ret Linje (Simpsons Linje). Find derpaa det geometriske Sted for Skæringspunktet mellem saadanne Linjer, naar de staa vinkelret paa hinanden.

(P. Heegaard.)

Opløsning. Det antages almindelig bekendt, at P's Projektioner paa de tre Sider AB, BC og AC, ligge paa ret Linie; at Midtpunktet af PM ogsaa ligger paa denne Linie, vil være bevist, naar det er bevist, at H ligger paa den Linie,

der forbinder de med P m. H. t. de tre Sider symmetriske Punkter a, b og c. Forlænges Højderne til Skæring med Cirklen i A_1, B_1 og C_1, vil Ha og PA_1 aabenbart skære hinanden paa BC, da jo A_1H bliver halveret af BC; det samme gælder naturligvis m. H. t. de andre Sider; men da Skæringspunktet mellcm PA_1 og BC og de analoge ligge paa ret Linie med H (Tidskrift A, Opg. 113) er Sætningen bevist.

Lad P og P′ være to Punkter paa Cirklen, hvis tilsvarende Simpsonslinier staa vinkelret paa hinanden og skære hinanden i S. Kaldes Projektionerne af P og P′ paa Siderne for P_a, P_b, P_c og P_a', P_b', P_c', ser man let, at

$$\angle SP_aB = \angle SP_a'P' = P_cPB = P_cBP',$$

men da $$\angle P_cPB + \angle PBP_c = 90^0,$$

er ogsaa $$\angle P_cBP' + \angle PBP_c = 90^0$$

ɔ: PP′ er en Diameter i Cirklen. Heraf ses, at ogsaa Midtpunkterne af HP og HP′ ligge diametralt modsat i den Cirkel, der faas ved at multiplicere den givne med $\frac{1}{2}$ m. H. t. H, ɔ: Nipunktcirklen. S ligger altsaa paa denne.

(T. Bonnesen.)

(En anden Løsning er indsendt af Åsted.)

24. $$(x^2 + 2x)^4 + (2x + 1)^4 + 15x^4 = 0.$$

(A. S. Bang.)

Opløsning. Ligningen ordnes og divideres med x^4, hvorved faas

$$\left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right) + 8\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) + 24\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)$$
$$+ 32\left(x + \frac{1}{x}\right) + 47 = 0.$$

Man sætter heri $x + \frac{1}{x} = y$ og faar paa sædvanlig Maade

$$y^4 + 8y^3 + 20y^2 + 8y + 1 = 0,$$

eller $$\left(y^2 + \frac{1}{y^2}\right) + 8\left(y + \frac{1}{y}\right) + 20 = 0,$$

man sætter dernæst $y + \frac{1}{y} = z$ og faar $z^2 + 8z + 18 = 0$.

Af denne Ligning faas 2 Værdier for z, og heraf ved at løse Ligningen $y^2 - zy + 1 = 0$, 4 Værdier for y, og endelig ved at løse Ligningen $x^2 - yx + 1 = 0$ 8 Værdier for x.

(H. C. Olsen.)

(Ogsaa løst af H. S. Nielsen.)

25. Bevis, at de fire Punktpar, hvori fire Orthogonalkugler tagne tre og tre skære hinanden, ved sexten forskellige Inversioner kunne transformeres i Hjørnespidserne af to concentriske regulære Tetraedre.

(Dr. J. de Vries.)

Opløsning. Vi ville først bestemme saadanne Inversioner, der overhovedet have Mulighed for at kunne løse Opgaven. Vi danne to Tetraedre med Vinkelspidserne i de 4 Punktpar, saaledes at Punkterne i samme Punktpar tilhøre hver sit Tetraeder. Saadanne Tetraederpar kunne dannes i et Antal af $2^3 = 8$. For at de to omskrevne Kugler for et saadant Tetraederpar ved en Inversion skulde gaa over til to concentriske Kugler, maa Inversionscentret være et af de to Punkter paa Centerlinjen, der ere konjugerede med Hensyn til begge Kuglerne, medens Inversionspotensen kan være vilkaarlig. Man kan altsaa ved $2 . 8 = 16$ forskellige Inversioner, eller rettere Grupper af Inversioner, bringe de 4 Punktpar over i Vinkelspidserne af to concentriske Tetraedre. Vi kunne nu vise, at disse altid blive regulære.

Lad ved en vilkaarlig af disse Inversioner det paagældende Kuglepar være gaaet over til to concentriske Kugler $\varkappa_1$ og $\varkappa_2$ med Centrum i O. Lad de i dem indskrevne Tetraedre være henholdsvis $A_1 B_1 C_1 D_1$ og $A_2 B_2 C_2 D_2$, saa at de ensbenævnte Bogstaver tilhøre samme Punktpar. Ortogonalkuglerne gaa over til ny Ortogonalkugler skærende hverandre 3 og 3 i Tetraedrenes Vinkelspidser. Linjerne $A_1 A_2$, $B_1 B_2$ o. s. v. gaa alle gennem samme Punkt R, Ortogonalkuglernes Radikalcentrum. En Inversion af hele Figuren med I til R med Inversionspotensen $RA_1 . RA_2$ vil ombytte A

B_1 og B_2 o. s. v., altsaa gaar $\varkappa_1$ over til $\varkappa_2$ og omvendt. Heraf følger, at R maa falde sammen med O og at $A_1 A_2 = B_1 B_2 = C_1 C_2 = D_1 D_2$.

En Plan vinkelret paa Midten a af $A_1 A_2$ maa gaa gennem Centrerne af de tre Ortogonalkugler, der gaa gennem A_1 og A_2. Oprejses derfor Planer vinkelrette paa $A_1 A_2$, $B_1 B_2$, $C_1 C_2$ og $D_1 D_2$ gennem Midtpunkterne a, b, c og d, vil det Tetraeder, der derved opstaar, have Vinkelspidser i Ortogonalkuglernes Centrer; den Vinkelspids, der ligger overfor Sideplanen gennem a, kaldes A, gennem b, B, o. s. v. Da Oa = Ob = Oc = Od, nemlig = Middeltallet af Radierne i $\varkappa_1$ og $\varkappa_2$, vil en Kugle med Centrum i O og Radius Oa røre Sideplanerne i a, b, c og d.

De tre Ortogonalkugler med Centrer i A, B og C skære hinanden i D_1, beliggende paa Od; heraf følger, at $\angle AD_1 B = \angle BD_1 C = \angle CD_1 A = 90^0$, og heraf atter, at D_1's Projektion d paa Planen ABC er Højdernes Skæringspunkt i $\triangle$ ABC. Analoge Sætninger gælde om a, b og c.

Lægge vi en Plan gennem O $\perp$ BC, skærer den Planerne ABC og DBC i to Linjer vinkelrette paa BC og gaaende henholdsvis gennem d og a, altsaa i to Højder i de paagældende Sideflader. Af denne og de analoge Sætninger følger nu, at D's Projektion paa ABC falder i d, ligeledes at A's falder i a o. s. fr., hvilket atter viser, at alle Højderne i Tetraedret gaa gennem O. Vi kunne nu imidlertid vise, at naar i et Tetraeder ABCD Højderne gaa gennem Centrum for den indskrevne Kugle, saa er Tetraedret regulært. Produktet af Højdernes Stykker ses nemlig straks at være det samme overalt, og da de nederste Stykker ere ligestore, ere de øverste det ogsaa, saa at Højdernes Skæringspunkt ogsaa er Centrum for den omskrevne Kugle. Heraf følger nu strax, at ABCD ved Drejning om O dækker sig selv i alle de Stillinger, som fordres for at det skal være regulært. Men ved disse Drejninger dække $A_1B_1C_1D_1$ og $A_2B_2C_2D_2$ ogsaa sig selv, og Ortogonalkuglerne dække hinanden.

Man kan altsaa ved 16 og kun ved 16 Inversionscentre løse den stillede Opgave, hvorved man samtidig (bortset fra Realiteten) trausformerer Ortogonalkuglerne over til Ortogonalkugler, der ere ligestore. (M. J.)

28. Find i et Cirkelbundt to Cirkler, for hvilke Radiernes Forhold er givet, og som fra et givet Punkt ses under lige store Vinkler. (P. Heegaard.)

Opløsning. Lad det givne Punkt være P, Centrerne O og O_1 og Radierne r og r_1. Man ser da let, at man har $\frac{PO}{PO_1} = \frac{r}{r_1}$ lig det givne Forhold $\frac{p}{q}$. Man konstruerer nu den Cirkel i Bundtet, der gaar gennem P (den har sit Centrum i Centerlinien, hvis Beliggenhed man kender); denne Cirkel er det geometriske Sted for de Punkter, hvis Afstande fra O og O_1 forholde sig som p til q. Lad Cirklen skære OO_1 i C og D; Skæringspunkterne ville da dele OO_1 harmonisk i Forholdet $\frac{p}{q}$; og altsaa vil O og O_1 dele CD harmønisk i Forholdet $\frac{\frac{p}{q}+1}{\frac{p}{q}-1} = \frac{p+q}{p-q}$. O og O_1 konstrueres nu let og de 2 Cirkler ere derved bestemte. (H. C. Olsen.)

(Ogsaa løst af stud. polyt. E. Schou og stud. mag. T. Bonnesen; denne sidste reducerer Opgaven til Konstruktion af $\triangle$ POO_1 hvori man kjender en vinkelhalverende, dennes Vinkel ved Grundlinien og Forholdet mellem de to andre Sider.)

Anmeldelser.

F. Gomes Teixeira: Curso de Analyse Infinitesimal.

(Porto, Typografia occidental 1889–92.)

Denne os tilsendte temmelig omfattende portugisiske bog i Infinitesimalregningen er en moderne og som det sy

læselig Lærebog i Analysen, der i det Hele giver exakte Beviser for Sætningerne. Da dette i hvert Fald ikke er muligt uden først at have defineret de irrationale Tal, begynder Bogen i sit 1ste Afsnit dermed og med Anvendelser af det mathematiske Grænsebegreb paa uendelige Rækker, Produkter og Kædebrøker.

Først derefter begynder Bogens Thema i snevrere Forstand, og indeholder i 1ste og 2det Bind Differential- og Integralregningen med dens geometriske Anvendelser omtrent i det sædvanlige Omfang dog med adskillige Tilføjelser. Saaledes findes i 1ste Bind Hovedsætningerne om Funktioner definerede ved Rækker samt om Funktioner af imaginære Variable; i 2det Bind Læren om Fourierske Rækker foruden meget andet. Mærkelig nok er der ikke medtaget noget Bevis for Existensen af et Integral til en Differentialligning, hvilket ikke stemmer med Bogens øvrige Karakter. Det 3die Bind gaar nøjere ind paa Funktioner med imaginære Variable og fremstiller tillige det vigtigste af Læren om Gammafunktioner og de Elliptiske Funktioner. Særlig den sidste er overordentlig letlæselig, bygget paa Weierstras' Methode, i Overensstemmelse med at Værket overalt lægger an paa at give moderne Fremstillinger. I det Hele maa en Bog af dette Omfang, der (med den ovenfor nævnte Undtagelse) aabenbart sætter sig det Maal at give Gyldighedsbetingelser, der ere tilstrækkelige og nogenlunde omfattende — men derimod ikke lægger Vægt paa de mere indviklede Spørgsmaal om nødvendige Betingelser — anses for at være netop passende for Mathematikstuderende. Bogen synes ogsaa bestemt for Polyteknikere, men for disse, der vel særlig maa indøves i Brugen af Methoderne, er allerede den ovennævnte Fordring vistnok temmelig svær.

Fra sin portugisiske Forlæggers Side er Bogen fortræffelig udstyret.

(C. J.)

Det Kongelige Danske Videnskabernes Selskabs Mathematiske Prisopgave for 1893.

(Pris: Selskabets Guldmedaille.)

De algebraiske Definitioner paa Kurver og Bestemmelser af Antallene af deres særegne Punkter og Tangenter lade sig umiddelbart kun omsætte til geometriske Bestemmelser at en temmelig negativ Art, saasom at de virkelig tegnede Kurver ville have højst saa og saa mange Skæringspunkter, særegne Punkter o. s. v. Ikke desmindre er der adskillige Tilfælde, hvor man har opnaaet meget overskuelige positive Optællinger af alle de projektivt forskellige Muligheder, som lade sig forene med disse negative Bestemmelser. Det er Newton, som i sin Undersøgelse af Trediegradskurverne har begyndt paa saadanne Arbejder; de ere fortsatte af de store Geometere i vort Aarhundredes Begyndelse, men have især vundet i Omfang i de sidste Decennier.

Dog have de opnaaede Resultater endnu en temmelig spredt Karakter, uagtet de anvendte Betragtningsmaader med dertil passende Modifikationer synes at maatte kunne anvendes paa videre Omraader. Som Exempler paa Muligheder, der i den Henseende synes at være tilstede, kan nævnes følgende. Hilbert har selv udvidet sine Undersøgelser om en plan algebraisk Kurves Grene til Rumkurve af en vis Orden af højest mulig Slægt. Disse Kurver ligge paa en Flade af anden Orden. Undersøgelserne synes at maatte kunne udvides ogsaa til andre Kurver paa en saadan Flade, hvilke da, algebraisk talt, kunne defineres ved deres Antal af Skæringspunkter med de rette Linier i hver enkelt af Fladens to Frembringerrækker. For Kurver paa en Flade af anden Orden kunde man muligvis ogsaa finde noget tilsvarende til Klein's meget almindelige Sætning om en algebraisk Kurves reelle Singulariteter.

I Planen kunde man muligvis ogsaa finde noget tilsvarende til denne Sætning ved i Stedet for om retliniede simple og særegne Tangenter at spørge om berørende Keglesnit, som tillige tilfredsstille andre passende Betingelser.

Sikker kan man endog være paa at finde enkelte saadanne Udvidelser af de alt bekendte Resultater, nemlig dem, som af disse kunne udledes ved bekendte Transformationer. Om saadanne Udvidelser spørges der vel ikke her; men naar man efter at have fundet dem ad denne Vej, søger direkte at begrunde dem, vil man derved kunne finde Vejen til virkelige Almindeliggørelser.

Da der saaledes er Udsigt til, at videre Undersøgelser af de projektivt forskellige geometriske Former, som fremstilles ved algebraiske Ligninger af en almindelig Natur, kunne give Udbytte, udsætter Selskabet sin Guldmedaille for det bedste Arbejde, som paa dette Omraade bringer nye Resultater. Der ønskes tillige gjort Rede for, hvilke rent geometriske Forudsætninger der, satte i Stedet for Definitionen ved algebraiske Ligninger, kunde frembringe de samme Resultater.

Prisbesvarelserne indsendes inden Udgangen af Oktober Maaned 1894 til Selskabets Sekretær, Professor, Dr. **H. G. Zeuthen.**

Opgaver til Løsning.

30. *) Man skal bevise, at

$$\lim_{a=\infty} \left(\sum_{0}^{\infty} u_n a^n : \sum_{0}^{\infty} v_n a^n\right) = \lim_{a=\infty} (u_n : v_n),$$

naar højre Side af denne Ligning har en bestemt og endelig Værdi, $\Sigma v_n a^n$ er en stedse konvergent Potensrække med positive Koefficienter, og a er positiv.

(C. L. W. V. Jensen.)

---

*) Denne Opgave, der ogsaa findes i forrige Hefte, gjentages her, da den der er uden løbende Nummer.

Bevis för en sats af sannolikhetskalkylens geometriska tillämpningar.

Af Carl Heumann.

I C. F. E. Björlings Lärobok i integralkalkyl S. 146, noten, finnes följande sats, som här skall bevisas:

Ett obegränsadt plan är genomdraget af parallela linier, hvilkas inbördes afstånd är 2a. Om en skifva begränsad af en sluten konvex kontur af hvilken form som helst, hvars största diameter är $< 2a$, kastas på det ifrågavarande planet, så är sannolikheten att den råkar en linie $= \frac{l}{2\pi a}$, då l betyder konturens hela längd.

Låt c vara radien och O medelpunkten för en cirkel, som är inskrifven i den gifna konturen. Denna cirkel kallar jag c-cirkeln. c är då den minsta af radii vectores från O till konturens punkter; låt b vara den största af dem. En cirkel med b till radie och O till medelpunkt tangerar då konturen utantill; hvarje större dermed koncentrisk cirkel omsluter helt och hållet skifvan utan att någonstädes skära eller beröra konturen. Man har då $2a > b > c > 0$.

Kastas nu skifvan på det gifna planet, så måste punkten O falla i någon punkt mellan två linier (vi kalla dem V och H) på ett afstånd från den ena (V), som må vara R, och således på afståndet $2a - R$ från den andra (H). Sannolikheten att O faller just på detta afstånd är $\frac{dR}{2a}$. Vore O fix i denna punkt och man vrede skifvan deromkring i ett godtyckligt läge, så vore sannolikheten att den råkade linien V i allmänhet en af konturens form beroende funktion af R, låt vara f (R). Samtidigt vore sannolikheten att skifvan råkade linien $H = f(2a - R)$, och således sannolikheten [illegible] råkade endera linien (båda på en gång kan [illegible] $= f(R) + f(2a - R)$.

Betecknas den sökta sannolikheten med P, så inses af det sagda att

$$P = \int_0^{2a} [f(R) + f(2a - R)] \cdot \frac{dR}{2a},$$

hvaraf man genom variabelbyte i sista termen lätt finner

$$P = \frac{1}{a} \int_0^{2a} f(R) dR. \tag{1}$$

Vi vilja nu undersöka f(R). I stället för att som vi nyss gjorde tänka oss skifvan vridas kring punkten O, kunna vi tänka oss skifvan orubbad, men i stället planet med i frågavarande linie V vridas ett helt hvarf kring punkten O såsom fix, och vi inse då att f(R) är = förhållandet mellan antalet lägen, i hvilka V härvid skär skifvans kontur, och hela antalet lägen, som V under tiden intar. Men detta kan tydligen utsägas på följande sätt. Om vi tänka oss en cirkel med O till medelpunkt och R till radie, så är f(R) = förhållandet mellan antalet af de tangenter till cirkeln, som skära konturen, och hela antalet af cirkelns tangenter. Vi skola nu utgående från detta sista betraktelsesätt söka härleda ett uttryck på f(R).

Emedan hvarje cirkel med O till medelpunkt och med en radie $<$ c faller helt och hållet inom konturen, med en radie $>$ b deremot helt och hållet utom densamma, så inses att

$$\left.\begin{array}{l} f(R) = 1 \text{ för } c \geqq R > 0 \\ f(R) = 0 \text{ för } \infty > R \geqq b \end{array}\right\} \tag{2}$$

För ett R-värde mellan b och c åter är $1 > f(R) > 0$, emedan motsvarande cirkel alltid skär konturen i ett (jemnt) antal punkter, så att en del af cirkelns tangenter falla helt och hållet utom konturen, en del åter skära densamma. Låt M vara en af de punkter, der c-cirkeln tangerar konturen, och låt MM_1 vara cirkelns och konturens gemensamma tangent i denna punkt. Vi tänka oss nu en cirkel med O till medelpunkt, R till radie (b $>$ R $>$ c), samt kalla N den punkt, der denna cirkel träffas af linien OM's förlängning åt M till. Emedan konturen är konvex, ligger den helt och hållet på

den ena sidan om MM_1 liksom om alla sina tangenter och deraf följer ock, att cirkeltangenten i N, som är parallel med MM_1, faller helt och hållet utom konturen. Tänka vi oss nu cirkeltangenten vridas, så att dess tangeringspunkt löper ett hvarf rundt cirkeln i positiv rigtning, samt beteckna med τ tangentens lutning mot MM_1, så faller den alltså för $\tau = 0$ helt och hållet utom konturen och fortfar att göra detta, ända tills den för $\tau = \tau_1$ tangerar konturen och derefter skär den. För $\tau = \tau_2$ slutar den att skära konturen och blir tangent till densamma samt faller derefter helt och hållet utom den, ända tills den för $\tau = \tau_3$ blir tangent och sedan åter börjar skära etc. Slutligen blir den för $\tau = \tau_{2n}$ för sista gången tangent till konturen och faller sedan helt och hållet utom den, ända tills den för $\tau = 2\pi$ sammanfaller med sitt ursprungliga läge. Man har då tydligen (för $b > R > c$)

$$f(R) = \frac{(\tau_2 - \tau_1) + (\tau_4 - \tau_3) + \ldots (\tau_{2n} - \tau_{2n-1})}{2\pi} = \frac{\Sigma(-1)^k \tau_k}{2\pi}, \quad (3)$$

der k är udda för sådana värden på τ, der skärning börjar, jemnt der skärning slutar.

Insättas nu (2) och (3) i (1), fås

$$P = \frac{1}{a}\left\{\int_0^c dR + \frac{1}{2\pi}\int_c^b \Sigma(-1)^k \tau_k \,.\, dR\right\}$$

$$= \frac{c}{a} + \frac{1}{2\pi a}\int_c^b \Sigma(-1)^k \tau_k \,.\, dR. \quad (4)$$

* * *

Vi vilja nu härleda ett uttryck på konturens längd l, för att deraf finna det samband, som råder mellan P och l. Vi införa ett polärt koordinatsystem, der O är origo och axeln parallel med MM_1 och låta som vanligt r betyda radius vector från O till en punkt på konturen, θ ∠ mellan r och axeln, τ ∠ mellan tangenten och axeln, φ ∠ mellan r och tangenten, p perpendikeln från origo mot tangenten, samt s båglängden, räknad från M åt positiva hållet, så att $\left.\begin{matrix} s = 0 \\ \tau = 0 \\ p = c \end{matrix}\right\}$ $\left.\begin{matrix} s = l \\ \tau = 2\pi \\ p = c \end{matrix}\right\}$ motsvara hvarandra.

Man har då relationerna

$$\begin{cases} \sin\varphi = \frac{r\,d\theta}{ds}; & p = r\sin\varphi \\ \cos\varphi = \frac{dr}{ds}; & \tau = \theta + \varphi \end{cases}$$

Af $p = r\sin\varphi$ följer $dp = dr\sin\varphi + r\cos\varphi\, d\varphi =$

$$= dr\frac{r\,d\theta}{ds} + r\frac{dr}{ds}d\varphi = \frac{r\,dr}{ds}(d\theta + d\varphi) = \frac{r\,dr}{ds}d\tau$$

eller

$$\frac{r\,dr}{ds} = \frac{dp}{d\tau}. \tag{5}$$

Vidare är $p^2 = r^2\sin^2\varphi = r^2(1 - \cos^2\varphi) = r^2 - \left(\frac{rdr}{ds}\right)^2$ $= r^2 - \left(\frac{dp}{d\tau}\right)^2$ eller $r^2 = p^2 + \left(\frac{dp}{d\tau}\right)^2$.

Häraf fås genom derivering

$$r\frac{dr}{d\tau} = p\frac{dp}{d\tau} + \frac{dp}{d\tau}\,\frac{d^2p}{d\tau^2}$$

eller, om i stället för $r\frac{dr}{d\tau}$ insättes $\frac{ds}{d\tau}\,\frac{dp}{d\tau}$ (enligt 5), efter förkortning

$$ds = \left(p + \frac{d^2p}{d\tau^2}\right)d\tau. \tag{6}$$

Integreras (6) mellan 0 och 2π, erhålles

$$l = \int_0^{2\pi} p\,d\tau + \Big/_{\tau=0}^{\tau=2\pi} \frac{dp}{d\tau} \text{ *)}$$

Den sista termen är tydligen 0; genom delvisintegration af den första erhålles

$$l = \Big/_{\tau=0}^{\tau=2\pi} p\tau - \int\tau\,dp = 2\pi c - \int\tau\,dp,$$

hvaraf

$$\frac{l}{2\pi a} = \frac{c}{a} - \frac{1}{2\pi a}\int\tau\,dp, \tag{7}$$

der $\int\tau\,dp$ är utsträckt öfver alla konturens punkter.

Jemförom nu detta uttryck med högra membrum af (4). Dervid erinra vi om, att R och p egentligen äro samma

*) Jfr. Camillo Tychsen: Om Sandsynlighedsregningens Anvendelser til Løsning af geometriske Problemer. Math. Tidsskrift 1874, S. 65.

linier, dock med den skilnad, att medan dR på grund af sin natur alltid är positivt, är dp för växande τ än positivt, än negativt och alltid positivt för de τ-värden, som här ofvan betecknats med udda indices, men negativt för de jemna. Båda integralerna äro vidare utsträckta öfver samma område. Af det sagda följer då, att högra membra af (7) och (4) äro identiska, och således också de venstra d. v. s.

$$P = \frac{1}{2\pi a}.$$

Grænseværdien for $\sqrt[n]{n}$ idet $n = \infty$.

Af cand. mag. Niels Nielsen.

1. Idet n er positiv hel, vil vi alene ved Induktion, og uden at anvende nogen matematisk Formel, finde Grænseværdien for $\sqrt[n]{n}$.

I Opgave 21 i min »Opgaver i ren matematik« har jeg bevist følgende:

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n < n \quad \text{eller:} \quad \sqrt[n]{n} > 1 + \frac{1}{n}. \tag{1}$$

2. Idet $a = 2^p$, skal vi nu bevise følgende Uligestorhed

$$\left(1 + \frac{1}{p}\right)^a > a. \tag{2}$$

(2) gælder for $p = 2$; antages Uligestorheden gyldig for et vilkaarligt p, faar man umiddelbart:

$$\left(1 + \frac{1}{p+1}\right)^{2a} > a \left(\frac{p}{p+1}\right)^a \left(\frac{p+2}{p+1}\right)^{2a}. \tag{3}$$

Det kommer altsaa an paa at bevise, at:

$$\left(\frac{p}{p+1}\right)^a \left(\frac{p+2}{p+1}\right)^{2a} > 2 \quad \text{eller:} \quad \frac{p}{p+1} \left(\frac{p+2}{p+1}\right)^2 > \sqrt[a]{2}. \tag{4}$$

Ifølge Opgave 6 i min »Opgaver i ren matematik« faas:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > 2 \quad \text{eller} \quad 1 + \frac{1}{n} > \sqrt[n]{2}. \tag{5}$$

Det kommer altsaa an paa at bevise, at man har:

$$\frac{p}{p+1} \cdot \left(\frac{p+2}{p+1}\right)^2 > 1 + \frac{1}{2^p}$$

$$\frac{p}{p+1} \frac{(p+2)^2}{(p+1)^2} = 1 + \frac{p^2 + p - 1}{p^3 + 3p^2 + 3p + 1};$$

altsaa skal vi bevise:

$$2^p > \frac{p^3 + 3p^2 + 3p + 1}{p^2 + p - 1};$$

men
$$\frac{p^3 + 3p^2 + 3p + 1}{p^2 + p - 1} < p + 3 < 2^p.$$

Altsaa er (2) almengyldig.

3. Idet $n = 2^p + q$, hvor $q < 2^p$, faas af (2):

$$\left(1 + \frac{1}{p}\right)^{2^p + q} > 2^p \left(1 + \frac{1}{p}\right)^q;$$

men
$$2^p \left(1 + \frac{1}{p}\right)^q > 2^p \left(1 + \frac{q}{p}\right) > 2^p + q;$$

altsaa faas
$$1 + \frac{1}{n} < \sqrt[n]{n} < 1 + \frac{1}{p}, \tag{6}$$

hvor p har den før angivne Betydning.

Lader vi p og dermed n selv voxe uden Grænse, faas af (6):

$$\lim_{n=\infty} [\sqrt[n]{n}] = 1.$$

Om de usammensatte Kurver af fjerde Orden, som dække sig selv ved en tredie Del af en hel Omdrejning om Begyndelsespunktet.

Af H. P. Nielsen.

Den almindelige Ligning for en Kurve af fjerde Orden kan i polære Koordinater skrives:

$$r^4 [A \cos 4(\theta - a) + B \cos 2(\theta - b) + C)$$

$$+ r^3 [D \cos 3 (\theta - d) + E \cos (\theta - e)]$$
$$+ r^2 [F \cos 2 (\theta - f) + G]$$
$$+ r . H \cos (\theta - h) + I = 0.$$

Da Kurven skal dække sig selv ved $\frac{1}{3}$ Omdrejning om Begyndelsespunktet, skal Ligningen ikke forandres ved at man sætter $\theta + \frac{2\pi}{3}$ for θ, hvilket medfører, at den maa have Formen

$$r^4 + A r^3 \cos 3 (\theta - \alpha) + B r^2 + C = 0,$$

eller naar Koordinatsystemet drejes Vinklen α om Begyndelsespunktet:

$$r^4 + A r^3 \cos 3 \theta + B r^2 + C = 0. \qquad (1)$$

Vi ville nu først betragte det Tilfælde, hvor Kurven har 3 Dobbeltpunkter.

Af (1) følger da, at det ene af dens Dobbeltpunkter maa ligge paa x-Axen. Kaldes dets Abscisse c, maa Ligningen

$$r^4 + A r^3 + B r^2 + C = 0$$

have to Rødder lig c, saa at man har de to Ligninger

$$c^4 + A c^3 + B c^2 + C = 0,$$
$$4 c^3 + 3 A c^2 + 2 B c = 0.$$

Sættes $C = \mu c^4$, faas heraf let:

$$A = 2 (\mu - 1) c, \quad B = (1 - 3 \mu) c^2,$$

hvorved Ligningen bliver:

$$r^4 + 2 (\mu - 1) c r^3 \cos 3 \theta + (1 - 3 \mu) c^2 r^2 + \mu c^4 = 0. \quad (2)$$

En simpel Undersøgelse, baseret paa Betingelsen

$$- 1 \leqq \cos 3 \theta \lesseqgtr + 1,$$

viser, at Betingelsen for at Kurven skal have andre reelle Punkter end Dobbeltpunkterne er, at μ ikke er en positiv ægte Brøk.

Det kan bevises, at de fundne Kurver ere de Hypocykloider, som frembringes, naar den rullende Cirkels Diameter er $\frac{1}{3}$ af den fastes. Lad a være Centerlinien og b Afstanden fra den rullende Cirkels Centrum til det beskrivende Punkt; de to sidste Punkter antages ved Bevægelsens Begyndelse henholdsvis at have Koordinaterne (a, 0) og (a — b, 0). Man har

da, naar Centerlinien har drejet sig Vinklen v og Koordinaterne til det beskrivende Punkt kaldes (r, θ):

$$\left.\begin{aligned} r\cos\theta &= a\cos v - b\cos 2v, \\ r\sin\theta &= a\sin v + b\sin 2v. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Ved Elimination af v faas Hypocykloidens Ligning:

$$r^4 + \frac{2a^2}{b} r^3 \cos 3\theta + \frac{(a^2 - b^2)(a^2 + 2b^2)}{b^2} r^2 - \frac{(a^2 - b^2)^3}{b^2} = 0.$$

Denne Ligning falder sammen med Ligningen (2), naar a og b bestemmes af:

$$c = -\frac{a^2 - b^2}{b}, \quad \mu = -\frac{b^2}{a^2 - b^2},$$

der give $\quad b = c\mu, \quad a = \pm c\sqrt{\mu^2 - \mu},$

hvor Fortegnet vælges saaledes, at a bliver positiv. a bliver reel, naar μ ikke er en positiv ægte Brøk, altsaa naar Kurven er reel. Man har da følgende Sætning:

Der gives ikke andre reelle plane Kurver af fjerde Orden, som have tre Dobbeltpunkter og dække sig selv ved $\frac{1}{3}$ Omdrejning om et fast Punkt, end de Hypocykloider, som faas, naar den rullende Cirkels Diameter er $\frac{1}{3}$ af den fastes.

Vi ville nu søge at udfinde Kurvernes Former, naar Betingelsen om Dobbeltpunkter bortfalder.

Af den almindelige Ligning:

$$r^4 + A r^3 \cos 3\theta + B r^2 + C = 0$$

følger:

$$\left.\begin{aligned} 2\sin^2\frac{3\theta}{2} &= \frac{r^4 + A r^3 + B r^2 + C}{A r^3}, \\ 2\cos^2\frac{3\theta}{2} &= \frac{r^4 - A r^3 + B r^2 + C}{-A r^3}. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Ere α, β, γ, δ Rødderne i Ligningen

$$r^4 + A r^3 + B r^2 + C = 0,$$

kunne de fundne Ligninger skrives:

$$\left.\begin{aligned} 2\sin^2\frac{3\theta}{2} &= \frac{(r-\alpha)(r-\beta)(r-\gamma)(r-\delta)}{A r^3}, \\ 2\cos^2\frac{3\theta}{2} &= \frac{(r+\alpha)(r+\beta)(r+\gamma)(r+\delta)}{-A r^3}. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Ved Hjælp af disse Ligninger er det let at undersøge, hvorledes θ varierer med r. Der blive forskellige Tilfælde at betragte efter Beskaffenheden af Rødderne α, β, γ, δ. Disse Tilfælde kunne imidlertid (om nødvendigt, ved Forandring af Polaraxens positive Retning) henføres til følgende:

1) 4 imaginære Rødder;

2) 2 pos. og 2 imag.;

3) 1 pos., 1 neg. og 2 imag.,

hvor den positive er numerisk lig eller større end den negative;

4) 2 pos. og 2 neg.;

5) 3 pos. og 1 neg.

Da man har:

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\delta} = 0,$$

kunne Rødderne ikke alle være positive. Den samme Ligning viser, at i femte Tilfælde maa den negative Rod være den numerisk mindste. Er en Rod Nul, maa mindst en Rod til være Nul. De Tilfælde, hvor der er lige Rødder, ere behandlede i første Opgave med Undtagelse af de, hvor to af Rødderne ere Nul. De indgaa imidlertid under de anførte Tilfælde som specielle.

De enkelte Tilfælde kunne nu behandles hver for sig ved Hjælp af Ligningerne (5).

Første Tilfælde. Da Tællerne paa højre Side ere positive for alle reelle Værdier af r, faar man modsatte Fortegn for $2 \sin^2 \frac{3\theta}{2}$ og $2 \cos^2 \frac{3\theta}{2}$. Kurven er altsaa imaginær.

Andet Tilfælde. Lad α og β ($\alpha \angle \beta$) være de positive Rødder. A maa være negativ, da Udtrykket for $2 \cos^2 \frac{3\theta}{2}$ skal være $+2$ for $r = \alpha$ ($2 \sin^2 \frac{3\theta}{2}$ bliver nemlig lig Nul for denne Værdi af α). Naar r voxer fra α til β, voxer $\sin^2 \frac{3\theta}{2}$ fra 0 til en vis Maximumsværdi, (som er mindre end 1, da $^2 \frac{3\theta}{2}$ ikke kan blive Nul for positive Værdier af r) og af-

tager igjen til Nul. Heraf følger, at Kurven bestaar af tre adskilte lukkede Grene.

De øvrige Tilfælde undersøges let paa lignende Maade. Her anføres blot Resultaterne.

Tredie Tilfælde. Kurven bestaar af en lukket Gren om Begyndelsespunktet.

Fjerde Tilfælde. Kurven bestaar af to lukkede Grene om Begyndelsespunktet.

Femte Tilfælde. Kurven bestaar af fire lukkede Grene, hvoraf den ene omslutter Begyndelsespunktet og dækker sig selv ved Drejningen om dette, medens de tre øvrige ligge udenfor den første og dække hverandre ved Drejningen.

Man danner sig lettest en Forestilling om disse Kurvers Figur ved at tænke sig at de ovennævnte Hypocykloider saa at sige »skiller sig ad« i Dobbelpunkterne, idet man erindrer at dette kan ske paa to Maader. I de Tilfælde, hvor to af Rødderne ere Nul, skal man da gaa ud fra den Hypocykloide, som har et tredobbelt Punkt i Begyndelsespunktet.

Danske Examensopgaver.

1. Magisterkonferenser.

Magisterkonferens i Fysik.

(December 1890.)

2 Examinander.

Opgave til Besvarelse i 6 Uger.

Den elektromagnetiske Lystheori.

Do. (for den anden Examinand).

Der gives en Fremstilling af Elektrolysen, med særligt Hensyn til de Anskuelser om Elektrolysens Natur, som ere fremsatte af Arrhenius.

Mindre Opgaver til Besvarelse i 4 Timer.

I. Hvorledes bestemmes Lydens Hastighed ad theoretisk Vej?

II. Efter en Udvikling af Methoden til Integration af den partielle Differentialligning

$$P\frac{dz}{dx}+Q\frac{dz}{dy}=R,$$

hvor P, Q, R ere Funktioner af x, y, z, integreres Ligningen:

$$(x-2y)\frac{dz}{dx}+(2x-3y)\frac{dz}{dy}=z.$$

III. Der gives en Udvikling af D'Alemberts Princip, der udvikles ved retvinklede, og, for Planens Vedkommende, tillige ved polære Koordinater.

En Partikel, paa hvilken ingen ydre Kræfter virker, er bunden til en Cirkel, hvis Centrum og Plan ere faste, medens Kvadratet paa Radius er $2kt$, hvor t er Tiden. Bestem Partiklens Bevægelse, naar Radius til Partiklen, for $t = 1$, har en Vinkelhastighed, der er $\frac{a}{2k}$.

Desuden en praktisk Prøve i Kemi.

Løsning af de mathematiske Opgaver.

II. Man faar ad sædvanlig Vej

$$\frac{dz}{z}=\frac{dy}{2x-3y}=\frac{dx}{x-2y}=\frac{-d(x-y)}{x-y}.$$

Første og sidste Forhold give ved Integration

$$l\,cz+l(x-y)=0,$$

altsaa

$$c_1=z(x-y).$$

Dernæst giver

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x-3y}{x-2y}$$

ved Substitutionen $y = xt$

$$x\frac{dt}{dx}=\frac{2(t-1)^2}{1-2t},$$

hvoraf
$$\frac{dx}{x} = -\frac{dt}{t-1} - \frac{dt}{2(t-1)^2}$$

$$l\,cx - l(t-1) = \frac{1}{2(t-1)}$$

$$c(y-x) = e^{\frac{x}{2(y-x)}}$$

altsaa
$$\alpha = (y-x)\,e^{\frac{x}{2(x-y)}}$$

Den primitive Ligning bliver da

$$(y-x)\,e^{\frac{x}{2(x-y)}} = \varphi(xz-yz).$$

III. $r = \sqrt{2kt}$

Man kan umiddelbart anvende Arealprincipet, der giver

$$r^2\frac{d\vartheta}{dt} = 2kt\frac{d\vartheta}{dt} = a,$$

som integreres ved

$$\vartheta = \frac{a}{2k}\,l\,t,$$

idet Konstanten kan udelades.

Banen bliver en logarithmisk Spiral med Ligningen

$$r = \sqrt{2k}\,.\,e^{\frac{k\vartheta}{a}}$$

Magisterkonferens i Fysik.

(Juni 1891.)

Opgave til Besvarelse i 6 Uger.

Hvorledes kan man maale Vædskers Overfladespænding, og hvilke Resultater er man derved kommen til.

Mindre Opgaver til Besvarelse i 4 Timer.

I. Den anden Hovedsætning i Varmetheorien (Clausius Carnots Theorier.)

II. Udled Karakterligningen for Konoider, der

Planen til Ledeplan, og for hvilke Linien $x = y = z$ er den ene Ledelinie. Undersøg dernæst, om der mellem disse Konoider findes Flader af anden Orden.

III. Hvorledes bestemmes Centralbevægelse? Som Exempel betragtes det Tilfælde, hvor Banen er en Lemniscat, og Kraften rettet mod Dobbeltpunktet.

Praktisk Prøve i Kemi.

Løsning af de mathematiske Opgaver.

II. Ligningerne for en ret Linie gjennem Punktet (α, α, α) og parallel med xy-Planen ere

$$z = \alpha$$

og
$$y - x = \beta(x - \alpha).$$

En Ledelinie giver en Relation mellem α og β, altsaa

$$\beta = \varphi(\alpha);$$

Ligningen for Konoiden bliver da

$$y - z = \varphi(z) \,.\, (x - z). \tag{1}$$

Elimination af den arbitrære Funktion φ giver først

$$p + q\,\varphi(z) = 0,$$

altsaa
$$p(x - z) + q(y - z) = 0, \tag{2}$$

som er Karakterligningen. Integration af (2) leder ogsaa let til (1).

Ligning (1) kan fremstille en Flade af anden Orden, en vindskjæv Paraboloide, naar $\varphi(z)$ er en brudden lineær Funktion af z.

III. Ligningen for Lemniscaten er:

$$r^2 = 2a^2 \cos 2\theta.$$

Man faar da:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a\sqrt{2}} (\cos 2\theta)^{-\frac{1}{2}},$$

hvoraf
$$\left(\frac{d \,.\, \frac{1}{r}}{d\theta}\right)^2 = \frac{4a^4 \sin^2 2\theta}{r^6}$$

$$\int R\,dr = -\frac{C^2}{2}\left(\frac{1}{r^4} - \frac{4a^4 \sin^2 2\vartheta}{r^6}\right) = -\frac{2a^4c^2}{r^6},$$

følgelig
$$R = \frac{12a^4c^2}{r^7}.$$

Hastigheden v bestemmes ved
$$v^2 = \frac{4a^4c^2}{r^6},$$

og Stedet i Banen ved
$$\sin 2\vartheta = \frac{2c}{a^2}t.$$

Magisterkonferens i Mathematik.

(Maj 1891.)

2 Examinander.

Opgave til Besvarelse i 6 Uger.

Der gives en Udvikling af den conforme Afbildnings Theori med særligt Hensyn til dens Forbindelse med Funktionstheorien.

Do. (for den anden Examinand).

Der ønskes en Udvikling af de forskjellige Veje, ad hvilke man har søgt at grundlægge de elliptiske Funktioners Theori.

Mindre Opgaver til Besvarelse i 4 Timer.

I. Der ønskes en Undersøgelse af arcsin Funktionen, idet man gaar ud fra Definitionen:

$$\arcsin z = \int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}};$$

derpaa undersøges, saavidt Tiden tillader det,

$$f(z) = \int \frac{dz}{\sqrt[3]{1-z^2}}.$$

II. Hvorledes bestemmes den relative Ligevægtstilstand for en homogen Vædske, der roterer med konstant Vinkelhastighed om en fast Axe?

Hvorledes bestemmes den frie Overflade, naar Vædsken kun paavirkes af Tyngdekraften og er indesluttet i en hul Kugle, som den i Hvile vilde fylde halvt?

Løsning af Opgave II.

Den frie Overflade er en Paraboloide med Ligningen

$$y^2 = \frac{2g}{a^2} x = px.$$

Den øverste Rand af den frie Overflade antages at ligge Stykket x under den øverste vandrette Tangentplan til Kuglen; x bestemmes da ved:

$$\pi x^2 (r - \frac{1}{3} x) + \frac{\pi}{ep} x^2 (2r - x)^2 - \frac{2}{3} \pi r^3 = 0.$$

Bortdivideres π og ordnes Ligningen faar man

$$f(x) = 3x^4 - (12r + 2p) x^3 + (12r^2 + 6rp) x^2 - 4r^3 p = 0.$$

Heri er $f(0) = -4r^3p$, $f(r) = 3r^4$; der findes altsaa én reel Rod mellem 0 og r.

Er a givet, bliver p bekjendt, og Paraboloiden maa, da $0 < x < r$, voxe med x, ɔ: der findes kun den ene Værdi af x. Denne er den søgte.

Hermed er dog forudsat, at Vædsken ikke skiller sig som en Ring, hvilket sker, naar a bliver tilstrækkelig stor.

I det Tilfælde, at Paraboloiden netop berører Kuglen, bliver $x = p$, og $p = \frac{2g}{a^2}$ bestemmes ved

$$p^3 - 6rp^2 + 12r^2p - 4r^3 = 0.$$

Denne Ligning giver én reel Rod for p, nemlig

$$p_1 = r(2 \sqrt[3]{4}).$$

Hvis altsaa $p < p_1$ eller $\omega > \sqrt{\frac{2r}{p_1}}$,

er den ovenstaaende Løsning ubrugelig.

I saa Tilfælde kan man bestemme Afstanden α fra Kuglens Centrum til Paraboloidens Toppunkt. I et Snit gjennem Axen ligger en Parabel med Ligningen $y^2 = px$ og en Cirkel med Ligningen $(x - \alpha)^2 + y^2 = r^2$. Til Bestemmelse af Skjæringspunkternes Abscisser x_1 og x_2 haves

$$x^2 + x(p - 2\alpha) + \alpha^2 - r^2 = 0.$$

Man skal nu have

$$\pi \int_{x_1}^{x_2} [r^2 - (x - \alpha)^2]\, dx - \pi \int_{x_1}^{x_2} px\, dx = \frac{2}{3} \pi r^3,$$

hvoraf

$$(x_2 - x_1)\left[r^2 - \alpha^2 + \left(\alpha - \frac{p}{2}\right)(x_1 + x_2) - \frac{1}{3}(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2)\right] = \frac{2}{3} r^3,$$

eller

$$\sqrt{p^2 + 4r^2 - 4p\alpha}\left[r^2 - \alpha^2 + \left(\alpha - \frac{p}{2}\right)(2\alpha - p) - \frac{1}{3}((p - 2\alpha)^2 - \alpha^2 + r^2)\right] = \frac{2}{3} r^3,$$

som reduceres til

$$(p^2 + 4r^2 - 4p\alpha)^{\frac{3}{2}} = 4r^3,$$

hvilket giver en reel Rod for α, nemlig

$$\alpha = \frac{p^2 + r^2(4 - 2\sqrt[3]{2})}{4p}.$$

For $p = 0$, ɔ: $\omega = \infty$, bliver $\alpha = \infty$, saa at Paraboloiden bliver en Cylinder, hvis indenfor Kuglen liggende Del har Højden $r\sqrt[3]{4}$.

Magisterkonferens i Mathematatik.

(December 1891.)

Opgave til Besvarelse i 6 Uger.

Hvorledes have Taltheorien og de algebraiske Ligningers Theori gjensidig bidraget til hinandens Udvikling?

Mindre Opgaver til Besvarelse i 4 Timer.

I. Find Differentialligningen for et System af Cirkler, hvis Diametre ere Brændstraalerne til det ene Brændpunkt i Ellipsen

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Vis, at der er een Cirkel, som ikke hører til Systemet og dog tilfredsstiller Differentialligningen.

II. Cykloidens vigtigste mekaniske Egenskaber.

Løsning af Opgave I.

Bruges polære Koordinater fra Brændpunktet, har Ellipsen og den variable Cirkel henholdsvis Ligningerne

$$r=\frac{a(1-e^2)}{1-e\cos\theta} \qquad (1)$$

og

$$\varrho = r\cos(\varphi-\theta), \qquad (2)$$

idet ϱ og φ ere Cirklens løbende Koordinater. Af (2) faaes, idet r og θ holdes konstante,

$$\frac{d\varrho}{d\varphi}=-r\sin(\varphi-\theta),$$

der med (2) giver

$$\varrho^2+\left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2=r^2 \qquad (3)$$

og

$$\varrho\cos\varphi-\sin\varphi\frac{d\varrho}{d\varphi}=r\cos\theta. \qquad (4)$$

Indsættes (3) og (4) i (1), faaes Cirkelsystemets Differentialligning

$$\varrho^2+\left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2=[a(1-e^2)+e(\varrho\cos\varphi-\sin\varphi\frac{d\varrho}{d\varphi})]^2 \qquad (5)$$

Herfra er det let at gaa over til retvinklede Koordinater gennem Formlerne $x=\varrho\cos\varphi$, $y=\varrho\sin\varphi$, $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, idet (5) kan skrives

$$\varrho^2 d\varphi^2+d\varrho^2=[(a(1-e^2)+2e\varrho\cos\varphi)\,d\varphi-e\,d(\varrho\sin\varphi)]^2,$$

som, da $d\varphi=\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}$ bliver

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=\left[\frac{a(1-e^2)+2ex}{x^2+y^2}\left(x\frac{dy}{dx}-y\right)-e\frac{dy}{dx}\right]^2.$$

Denne Ligning tilfredsstilles af $(x - ae)^2 + y^2 = a^2$, eller $x^2 + y^2 = a^2(1 - e^2) + 2aex$. Man faar nemlig heraf $\frac{dy}{dx} = \frac{ae - x}{y}$, hvorefter Indsættelse giver

$$\frac{a^2}{y^2} = \left[\frac{aex - x^2 - y^2}{ay} - \frac{ae^2 - ex}{y}\right]^2$$

$$= \left(\frac{2aex - a^2 - 2aex}{ay}\right)^2 = \frac{a^2}{y^2}.$$

---

2. Skoleembedsexamen.

Skoleembedsexamen i Fysik.

(Januar 1891.)

Skriftlige Opgaver.

Fysik. I. Højdemaaling ved Barometret.

II. Lysets Absorbtion.

III. Luftthermometret.

IV. Hvorledes virke to elektriske Strømme paa hinanden.

Astronomi. Hvad er Middeltallet og Middelfejlen for Iagttagelser, naar en Række Gjentagelser p Gange har givet Resultatet 1 og de øvrige q Gange Gange Resultatet 0? Hvorledes bestemmes derefter Sandsynligheden for et Fænomen der 173 Gange af 57932 har vist gunstigt Resultat?

Mathematik. I. Hvorledes bestemmes Enveloppen for et System af plane Kurver? Find Ligningen for Enveloppen for et System af ligesidede Hyperbler, der have Centrum i Koordinatsystemets Begyndelsespunkt og have Linien $x = 1$ til Normal?

II. Efter en kort Udvikling af Formlerne for Tyngdepunktets Koordinater, bestemmes Tyngdepunktet af [illegible] lumen, der i et retvinklet Koordinatsystem b

Fladen $xyz = n$ samt af tre Planer, der ere parallele med Koordinatplanerne og gaa gjennem Punktet (a, b, c), hvor $abc = p < n$. a, b, c og n positive.

Løsning af Opgaverne i Mathematik.

I. En vilkaarlig ligesidet Hyperbel med Centrum i Begyndelsespunktet har Ligningen:

$$x^2 + 2axy - y^2 + b = 0.$$

Nu skal $x = 1$ give $\frac{dy}{dx} = 0$, saa at,

da
$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + ay}{y - ax},$$

der til $x = 1$ svarer $y = -\frac{1}{a}$, hvilket indsat i Hyperblens Ligning giver

$$b = 1 + \frac{1}{a^2}.$$

Det bevægelige Kurvesystem er da:

$$F = x^2 + 2axy - y^2 + 1 + \frac{1}{a^2} = 0,$$

hvoraf
$$\frac{dF}{da} = 2xy - \frac{2}{a^3} = 0,$$

saa at Elimination af a giver

$$(y^2 - x^2 - 1)^3 = 27x^2y^2.$$

II. Vi ville først søge Arealet, beliggende i første Kvadrant, mellem en Hyperbel med Ligningen $xy = t$ og to rette Linier $x = r$ og $y = s$.

Arealet bliver

$$u = \int_r^{\frac{t}{s}} y dx - t + rs = \int_r^{\frac{t}{s}} \frac{t}{x} dx - t + rs = tl\frac{t}{rs} - t + rs.$$

En uendelig tynd Skive af det søgte Volumen, som er parallel med xy-Planen i Afstanden z fra denne, har Størrelsen

$$udz = \left(\frac{n}{z} l \frac{n}{abz} - \frac{n}{z} + ab\right) dz,$$

Volumen bliver

$$\int_c^{\frac{n}{ab}} \left(\frac{n}{z} \left(l \frac{n}{ab} - 1\right) - \frac{n}{z} lz + ab \right) dz$$

$$= \left[n \left(l \frac{n}{ab} - 1\right) lz - \frac{n}{2} (lz)^2 + abz \right]_c^{\frac{n}{ab}} .$$

som, idet $ab = \frac{p}{c}$, bliver

$$nl . \frac{n}{p} \left(l . \frac{nc}{p} - 1\right) - \frac{n}{2} \left[\left(l . \frac{n}{p}\right)^2 + 2l \frac{n}{2} . lc \right] + n - p$$

$$= \frac{n}{2} \left(l . \frac{n}{p}\right)^2 - n . l \frac{n}{p} + n - p = \frac{n}{2} \left(l \frac{n}{p . c}\right)^2 + \frac{n}{2} - p .$$

Momentet med Hensyn til xy-Planen bliver:

$$\int_c^{\frac{nc}{p}} \left[n \left(l \frac{n}{ab} - 1\right) - nlz + abz \right] dz$$

$$= \left(n . l \frac{n}{ab} z + nzlz + \frac{1}{2} abz^2 \right)_c^{\frac{nc}{p}} = c \left(\frac{n^2 - p^2}{2p} - nl \frac{n}{p} \right) .$$

Idet Tyngdepunktet er (ξ, η, ζ), faar man altsaa

$$\zeta = c . \frac{\frac{n^2 - p^2}{2p} - nl \frac{n}{p}}{\frac{n}{2} \left(l \frac{n}{pb}\right)^2 + \frac{n}{2} - p} ,$$

og analoge Udtryk for ξ og η.

Skoleembedsexamen i Fysik.

(Juni 1891.)

Mathematik overført fra polyteknisk Examen.

Skriftlige Opgaver.

Fysik. I. Vædskers Strømning gjennem snævre Rør.
II. Fluorescens og Fosforescens.
III. Temperaturligevægt ved Varmestraaling.
IV. Thermoelektriciteten.

Astronomi. Hvad forstaar man ved Dobbeltstjerner? Hovedtrækkene angaaende deres Bevægelse o[illegible]enhed.

Skoleembedsexamen i Mathematik.

(Juni 1891.)

Skriftlige Opgaver.

Mathematik. I. Hvilke Methoder haves til approksimert Beregning af bestemte Integraler? Anvendelse til approksimert Beregning af l. 2 og π.

II. 1. Find Indhyllingskurven for Keglesnit med en given selvkonjugert Trekant ɔ: en saadan, hvor hver Vinkelspids til Polar har den modstaaende Side.

2. Find Indhyllingsfladen for Asymptotekeglerne til Flader af anden Orden med fælles Hovedsnitsplaner og med et fælles Par konjugerede Diametralplaner.

3. Find Ligningen for Indhyllingsfladen for selve disse Flader af anden Orden, naar det tillige er givet, at de gaa gjennem et fast Punkt.

III. Efter en Fremstilling af Ligevægtsbetingelserne for bøjelige Snore løses følgende Opgave:

1. To tynde Snore ligge over en glat Flade, og danne ved deres Skjæringspunkt rette Vinkler; i de to Endepunkter bære de ligestore Vægte v. Hvorledes bestemmes Trykket i Skjæringspunktet?

2. Et Kar lukkes af en tynd Hinde (Sæbeboble). Forskjellen i Tryk pr. Fladeenhed indenfor og udenfor er p. Et cirkelformigt Fladeelement paavirkes af den omgivende Del af Hinden med en Kraft tds (t konstant), hvor ds er Omkredsens Bueelement. Bevis, at Hinden danner en Flade med konstant Krumning. (Sum af Hovedkrumningsradiernes reciproke Værdier).

IV. (Opgave, som kan tages fra hvilkensomhelst Gren af Faget.)

En Kurve i polære Koordinater fremstilles ved følgende Ligning:

$$r = a + \frac{b}{\cos\theta}.$$

Hvad hedder denne Kurve? Hvorledes ser den ud? Hvorledes kan man anvende Kinematiken til at konstruere en Tangent til den i et bevægeligt Punkt?

Desuden: Særligt Spørgsmaal til den ene Kandidat (som særlig har læst Mathematikens Historie):

Hvilken Betydning har denne Kurve haft i Oldtidens og Arabernes Mathematik?

Særligt Spørgsmaal til den anden Kandidat (som særlig har læst Funktionstheori):

Ved hvilket Integral udtrykkes Arealet af en Omdrejningsflade om Polaraxen med en Bue af Kurven til Meridian som Funktion af Koordinaterne til Buens Endepunkter?

For hvilke Værdier af $\frac{a}{b}$ vil Differentialet til dette Integral forgrene sig saaledes, at Arealet paa Grund af denne Forgrening udtrykkes alene ved logarithmiske og algebraiske Funktioner af de retvinklede Koordinater til Buens Endepunkter?

Astronomi. Hvad forstaar man ved Dobbeltstjerner? Hovedtrækkene angaaende deres Bevægelse og Beskaffenhed.

Fysik. I. Faste Legemers Forhold overfor Strækning.

II. Hvorledes undersøges Dampes Forhold overfor Mariottes og Gay-Lussacs Love?

Løsning af Opgaverne i Mathematik.

II. 1. Tages Trekanten til Koordinattrekant, og bruges der Liniekoordinater, faar et vilkaarligt Keglesnit Ligningen

$$k_1 x_1^2 + k_2 x_2^2 + k_3 x_3^2 = 0.$$

Skulle Linierne A_1; A_2; A_3 og B_1; B_2; B_3 være konjugerede, faar man

$$k_1 A_1 B_1 + k_2 A_2 B_2 + k_3 A_3 B_3 = 0.$$

Bortelimineres k_3 af disse Ligninger, faas en Ligning af Formen

$$k_1 \varphi + k_2 \psi = 0.$$

Det ses altsaa, at Kurverne have 4 faste Tangenter. Disse maa udgjøre Indhyllingskurven.

Opgaven kunde ogsaa løses ved Brug af Punktkoordinater Keglesnittets Ligning har da Formen

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 = 0. \qquad (1)$$

Polen y til Linien

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3 = 0$$

bestemmes ved

$$\frac{a_1 y_1}{A_1} = \frac{a_2 y_2}{A_2} = \frac{a_3 y_3}{A_3}.$$

Skal denne ligge paa Linien

$$B_1 x_1 + B_2 x_2 + B_3 x_3 = 0$$

maa man have

$$\frac{A_1 B_1}{a_1} + \frac{A_2 B_2}{a_2} + \frac{A_3 B_3}{a_3} = 0. \qquad (2)$$

Idet Forholdene $a_1 : a_2 : a_3$ ere de variable Parametre, findes Indhyllingskurven ved Differentiation af (1) og (2) med Hensyn til 2 af disse Forhold og Elimination.

Man finder

$$\frac{x_1^2}{\frac{A_1 B_1}{a_1^2}} = \frac{x_2^2}{\frac{A_2 B_2}{a_2^2}} = \frac{x_3^2}{\frac{A_3 B_3}{a_3^2}},$$

og ved Indførelse af de herved bestemte Værdier for $a_1 : a_2 : a_3$

i (1) $\sqrt{A_1 B_1}\, x_1 + \sqrt{A_2 B_2}\, x_2 + \sqrt{A_3 B_3}\, x_3 = 0, \qquad (3)$

som ved de forskjellige Kombinationer af Fortegnene give 4 rette Linier.

2. er løst ved de her behandlede Ligninger, naar man blot lader x_1, x_2 og x_3 betyde Rumkoordinater. Indføres de sædvanlige Betegnelser x, y, z for disse, bliver Ligning (1) for Assymptotekeglen til

$$a_1 x^2 + b_1 y^2 + c_1 z^2 = 0 \qquad (1')$$

og Ligning (3) til

$$\sqrt{A_1 B_1}\, x + \sqrt{A_2 B_2}\, y + \sqrt{A_3 B_3}\, z = 0, \qquad (3')$$

som fremstiller 4 Planer gjennem Fladernes fælles Centrum.

Ligning (1') skal ombyttes med Ligningen for selve Fladen

$$a_1 x^2 + b_1 y^2 + c_1 z^2 = 1.$$

Skal denne gaa gjennem et fast Punkt (x_1, y_1, z_1), maa man have

$$a_1(x^2 - x_1^2) + b_1(y^2 - y_1^2) + c_1(z^2 - z_1^2) = 0. \quad (1'')$$

Idet Betingelsen for at to Planer ere konjugerte vedblivende udtrykkes paa samme Maade, vil Indhyllings-Fladens Ligning faas af (3′) ved Ombytning af x, y, z med $\sqrt{x^2 - x_1^2}$, $\sqrt{y^2 - y_1^2}$, $\sqrt{z^2 - z_1^2}$. Den bliver da

$$\sqrt{A_1B_1(x^2 - x_1^2)} + \sqrt{A_2B_2(y^2 - y_1^2)} + \sqrt{A_3B_3(z^2 - z_1^2)} = 0. \quad (3'')$$

Bringes denne paa hel og rational Form, faas en Ligning af 4de Grad, saa Indhyllingskurven er af 4de Orden. I det Leddene af 3die og 4de Grad blive de samme, som om x_1^2, y_1^2 og z_1^2 vare 0, ville Planerne (3″) skjære denne Flade i Keglesnit.

III. 1. Den konstante Spænding er givet lig v. Den ene Snors Tryk paa Fladen er da $\frac{v}{r_1}$ ds, idet r_1 er Fladens Krumningsradius i dennes Retning. Trykket i Skjæringspunktet er da $v\,ds\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_0}\right)$.

2. Radius til det cirkelformede Fladeelement være r, Radierne i to paa hinanden vinkelrette Retninger r_1 og r_2. Trykket i Centrum af en uendelig smal Strimmel af Hinden langs et normalt Snit er da $\frac{2t\,ds}{r_1} r$ og i et Snit vinkelret paa det første $\frac{2t\,ds}{r_2} r$, tilsammen

$$2tr\,ds\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right),$$

og af hele Elementet, idet $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$ er konstant,

$$t\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) = p \quad \text{ɔ:} \quad \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{p}{t}.$$

IV. Kurven er en Konchoide, og Besvarelsen af de første Spørgsmaal altsaa bekjendt.

Idet af det omspurgte Bælte bliver

$$-2\pi\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sqrt{a^2\cos^4\theta+2ab\cos^3\theta+b^2}\left(\frac{a}{\cos^2\theta}+\frac{b}{\cos^3\theta}\right)d\cos\theta$$

Dette vil blive fremstillet ved logarithmiske og algebraiske Funktioner af $z = \cos\theta$, og altsaa af de retvinklede Koordinater x og y, naar

$$\sqrt{a^2z^4+2abz^3+b^2}$$

har sammenfaldende Forgreningspunkter ɔ: for $\frac{b}{a} = \pm\frac{3}{4}\sqrt{3}$ eller $a = 0$ eller $b = 0$.

Tillægsexamen i Mathematik.

(Juni 1891.)

Skriftlig Prøve.

Efter en kort Udvikling af Ligevægtsbetingelserne for en Vædske, som er underkastet ydre Kræfter, undersøges Ligevægtsfiguren for en homogen Vædske, som roterer om en given Axe med given Omdrejningshastighed x og tiltrækkes til et fast Punkt af Axen med en Kraft proportional med Afstanden. Vædsken har et givet Rumfang, og er ikke underkastet ydre Tryk.

Kan Rotationshastigheden, naar Tiltrækningen er givet, være saa stor, at Ligevægten bliver umulig?

Opløsning.

Naar Tætheden er ϱ, Tiltrækningen i Afstanden 1 lig μ og Omdrejningshastigheden ω, faar man paa sædvanlig Maade

$$-\frac{1}{2}\mu(x^2+y^2+z^2)+\frac{1}{2}\omega^2(x^2+y^2)+C = \varrho p.$$

For at denne kan fremstille en endelig lukket Flade, kræves $\omega^2 < \mu$. C bestemmes derefter ved, at man kjender Volumen af den til $p = 0$ svarende Omdrejningsellipsoide.

Litteraturanmeldelser.

C. A. Laisant:
Recueil de problèmes de Mathèmatiques.

(Paris, Gauthiers-Villars et fils.)

I Aarenes Løb er der i Tidsskrifter spredt en overordentlig Mængde af Opgaver, som det ikke desto mindre kan være vanskelig nok at faa draget Nytte af, da de jo dels findes i mange forskjellige Tidsskrifter, dels ikke ere ordnede efter deres indbyrdes Sammenhæng. Det er derfor et særdeles nyttigt Foretagende, Hr. Laisant har foretaget sig ved med Omhu at samle og ordne de Opgaver, der siden 1842 (Aarstallet for første Bind af »Nouvelles Annales«) ere opstillede i franske mathematiske Journaler. Der er saavidt Red. bekjendt udkommet 7 Bind:

I. Elementær Arithmetik, Algebra og Trigonometri.
II. Elementær Geometri m. m.
III. Algebra, Taltheori, Sandsynlighedsregning.
IV. Analytisk Geometri med 1 Dimension.
V. Analytisk Geometri med 3 Dimensioner.
VI. Trekantens Geometri.
VII. Infinitesimalregning og Mekanik.

Til hver Opgave er føjet Henvisning til dens Løsning i vedkommende Tidsskrift, og de ikke løste Opgaver (blandt hvilke man mærkelig nok kan finde enkelte ganske lette) ere marquerede ved en Stjærne.

Revue semestrielle des publications mathematiques redigé par P. H. Schoute, D. J. Korteweg, J. C. Kluyver, W. Kapteyn, P. Zeeman. I. première partie. (prix 7 Rm. p. a.)

(Amsterdam, W. Versluys.)

Det mathematiske Selskab i Amsterdam har med Understøttelse af en Række Videnskabsmænd paabegyndt Ud-

givelsen af en halvaarlig Oversigt over mathematiske Arbeider. Denne, der i første Linie er bestemt for Selskabets egne Medlemmer, vil være af stor og almindelig Nytte, idet man siden Bibliotheca Mathematica ophørte med sine summariske Oversigter har savnet en tilstrækkelig hurtig Meddelelse om mere eller mindre samtidige Arbejder. Det er en Selvfølge, at Fordringen til Aktualitet kræver Indskrænkninger i andre Henseender saaledes, at der for en Del Afhandlingers Vedkommende kun gives Overskriften, for andre kun en ganske kort Angivelse af Indholdet.

I mangfoldige Tilfælde er dette imidlertid fuldstændig tilstrækkelig, hvad der vistnok vil skaffe denne Revue stor Udbredelse. Et særligt Fortrin har den desuden ved at lægge den systematiske Ordning til Grund, der i 1889 blev foreslaaet paa en mathematisk Congres i Paris under Poincarés Forsæde.*) Da dette Forslag neppe er tilstrækkelig bekjendt, findes det i det væsentlige aftrykt i Revuens første Halvbind. I Overensstemmelse med Pariser-Bestemmelserne findes Overskriften (og forresten ogsaa Indholdsoversigten) angivet i Originalsproget, forsaavidt dette hører til de mere bekjendte Sprog.

Afhandlingerne ere ordnede efter Tidsskrifter, men Heftet slutter saavel med den systematiske Oversigt, som med en Forfatterfortegnelse. Jeg tror i det Hele, at denne, ogsaa fortræffeligt udstyrede Revue, vil vinde almindelig Paaskjønnelse af alle Mathematikere, saafremt den kan holde, hvad Begyndelsen lover.

Annuaire pour l'an 1893 publié par le Bureau des Longitudes.
(ca. 900 Sider i 8vo). Pris Frc. 1,50.
(Paris, Gauthier Villars et fils. 1893.)

Aarbogen indeholder den sædvanlige om end stadig forøgede Række af Artikler og Tabeller over fysiske, kemiske;

*) Af Bestemmelserne er der i Aar udkommen (og os tilsendt) er

meteorologiske og en Masse af statistiske Emner. Dertil er føjet de følgende Noter: Om Observatoriet paa Mont-Blanc af J. Jansen; Om Sammenhængen mellem den statiske og den dynamiske Elektricitets Fænomener og om de elektriske Enheder af A. Cornu (en fuldstændig elementær og særdeles interessant Sammenstilling); Om Luftsejlads, en Tale af J. Jansen; Tale i Anledning af Ossian Bonnets Død af F. Tisserand; Tale i Anledning af Admiral Moucher's Død af Faye og Levy; Tale ved Indvielsen af en Statue af General Perrier af J. Jansen.

Løste Opgaver.

26. Til Bestemmelse af et Keglesnit kender man tre af dets Punkter og Krumningscirklen i et af disse. Hvorledes kan Keglesnittet konstrueres.

(A. N. Godefrey.)

Opløsning. Lad 2 Keglesnit φ og ψ røre hinanden i a og skære hinanden i b og c; en fast Linie gennem a skærer dem henholdsvis i m og n, en Variabel i x og y (foruden i a). Liniebundterne m (x) og n (y) ere projektive med Liniebundtet a (x), altsaa indbyrdes projektive; da ma svarer til na, bliver det geometriske Sted for Skæringspunktet z mellem mx og my en ret Linie gennem b og c; Sætningen vedbliver at gælde, hvis c falder sammen med a, altsaa ogsaa hvis φ er den oskulerende Cirkel i a.

Lad det søgte Keglesnit være ψ og de givne Punkter n_1 og n_2, de hvori an_1 og an_2 skære φ være m_1 og m_2; $m_1 m_2$ og $n_1 n_2$ skære da hinanden paa ab, der da kan konstrueres. Nu er Projektioiteten mellem a (y) og n_1 (y) bekendt og ψ bestemt.

(P. Heeg

5. Bestem de Flader, for hvilke de va

Billeder af Faldlinjerne danne et System af ligedannede og ensstillede eller af parallelforskudte Kurver.

(C. J.)

Opløsning. Faldlinjernes Projektioner kunne henholdsvis være

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{og} \quad \frac{dy}{dx} = F(x).$$

Fladens partielle Differentialligning er henholdsvis

$$p \cdot F\left(\frac{y}{x}\right) - q = 0 \quad \text{og} \quad p \cdot F(x) - q = 0.$$

De Lagrangeske Hjælpeligninger give

$$z = c, \qquad \text{og} \qquad z = c,$$

$$x = c_2\, \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \qquad\qquad y - \varphi(x) = c_2$$

Fladens Ligning er da

$$x = \psi(z) \cdot \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \qquad\qquad y = \varphi(x) + \psi(z).$$

Lettere saaledes:

Niveaukurvernes Projektioner blive

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{F\left(\frac{y}{x}\right)} = f\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{og} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{F(x)} = f(x)$$

altsaa Systemer af samme Art som de oprindelige; Ligningerne have Formen

$$x = c \cdot \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \qquad \text{og} \qquad y = \varphi(x) + c,$$

hvoraf Fladerne faas

$$x = \psi(z) \cdot \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \qquad\qquad y = \varphi(x) + \psi(z).$$

(M. J.)

Opgaver til Løsning.

---

31. ... given Kurve ruller en Tangent, som ... ns den skærer en anden

given Kurve i B. Hvorledes konstrueres Tangenten til det geometriske Sted for det Punkt C af Tangenten, der bestemmes ved, at Produktet AB . AC er konstant.

(F. Bing.)

[illegible]. Et med Vædske fyldt, fladbundet Kar af givne Dimensioner er anbragt oven over et andet lignende, men tomt Kar, som har et Hul i Bunden. Der stikkes nu et lige saa stort Hul i det øverste Kars Bund, ikke lodret over Hullet i det nederste Kar.

Hvor højt stiger Vædsken i det nederste Kar? Hvor højt staar den i det Øjeblik, det øverste bliver tomt? Hvor lang Tid er der gaaet, naar det nederste atter er tomt?

Udstrømningen tænkes at følge Toricellis Lov, idet der ses bort fra Tryk paa Overfladen, Vedhængning ved Karbund og -væg og den Tid, Vædskedelen er om at falde fra det øverste til det nederste Kar.

(J. A. Larsen.)

[illegible]. Af to Tal A og B dannes to andre, dels ved at multiplicere dem, dels ved at stille B bag ved A. Af de nye Tal skal det ene være et Multiplum af det andet. Find A og B, idet B er primisk med 10.

(J. A. Larsen.)

[illegible]. Man skal bevise, at:

$$\frac{1}{1^s}+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}+\ldots =$$

$$\frac{1}{s-1}+\frac{1}{2}+2\int_0^{\infty}\frac{\cos^{s}[illegible]\,.\,\sin s[illegible]}{e^{2\pi t}-1}\,dt.$$

(J. L. W. V. Jensen.)

[illegible]. Hvilken Kurve maa man lade rulle paa en ret Linie for at et Punkt i dens Forbindelse med den rullende Kurve kan beskrive en Cirkel.

(Juel.)

36. Læg en ret Linie i en given Retning, saa at hele det paa denne imellem to givne Cirkler afskaarne Stykke fra et af disses Skæringspunkter ses under en given Vinkel.

(T. Bonnesen.)

37. Læg en ret Linie, saa at hele det paa denne mellem to givne Cirkler afskaarne Stykke fra et af disses Skæringspunkter ses under en given Vinkel, og tillige af en given ret Linie gennem dette Punkt deles i et givet Forhold.

(T. Bonnesen.)

38. I en Plan skal bestemmes to Systemer af ni Punkter

$$a_1\, a_2\, a_3 \ldots a_8\, a_9$$
$$b_1\, b_2\, b_3 \ldots b_8\, b_9$$

af den Beskaffenhed, at der altid, naar man udtager to vilkaarlige Par tilsvarende Punkter a_i og b_i, a_j og b_j, skal findes endnu ét og kun ét Par tilsvarende Punkter a_k og b_k, saaledes at de to Trekanter $a_i\, a_j\, a_k$ og $b_i\, b_j\, b_k$ blive ligedannede.

(En ældre uløst Opgave af Laguerre i Nouv. Annales.)

39. Paa en given Kugle, hvis Radius dog ikke er bekjendt, findes to Punkter A og B. Hvorledes kan man ved Hjælp af en Passer konstruere et Punkt C paa den gjennem A og B gaaende Storcirkel, hvis sfæriske Afstand fra A er n Gange den sfæriske Afstand mellem A og B, naar n er et helt Tal. (C. J.)

40. Fire Cirkler A, B, C, D i en Plan ere givne saaledes, at man kjender Længderne af alle Centerlinier og af alle Radier (regnede med Fortegn). Hvorledes finder man Betingelsen for, at fire af Fællestangenterne, hvorimellem ikke to til samme Cirkelpar, ville berøre én og samme Cirkel.

(C. J.)

41. I dobbelt retvinklet Billede er givet to vindskære
og B. En Flade frembringes af en vandret Cirkel,
glider paa A medens Cirklen stadig skærer B.

I et vilkaarligt Punkt af Fladen givet ved lodret Billede skal man konstruere Tangentplanen. (C. J.)

42. En Omdrejningsflade frembringes af en Cirkel, der drejer sig om en lodret Axe, der er parallel med Cirklens Plan, men hvis Projektion paa denne Plan ikke indeholder Centret. Konstruer med Passer og Lineal [1]) de Dobbelttangentplaner, [2]) de Dobbelttangenter til Fladen, der gaa gjennem et givet Punkt. (C. J.)

43. Bestem de Kurver, hvor der er et konstant Forhold mellem to konsekutive Tangenters Vinkel og Vinklen mellem de konsekutive Hovednormaler, der svare til Tangentens Røringspunkter. (C. J.)

Meddelelser.

Det physico-mathematiske Selskab i Kasan har tilsendt os en Opfordring til at bidrage til at samle en Sum til Minde om Nicolaus Iwanowitsch Lobatcheffsky (født 1793).*) Denne berømte Geometrer har særlig gjort sig bekjendt ved at være en Banebryder for den Ikke-Euklidiske Geometri, et Emne, hvorom der nu tildags existerer en stor Litteratur, og som ikke blot har mathematisk men ogsaa en betydelig erkjendelsestheoretisk Interesse. Bidragene tænkes anvendte dels til en Buste i Kasans Universitetsbygning dels til mathematiske Præmier for Undersøgelser, særlig saadanne, der staa i Forbindelse med Lobatcheffsky's Arbejder. Bidragene ønskes sendte til

Kasan, société Physico-mathématique.

---

*) Pladsen har ikke tilladt os at aftrykke

Om en Trediegradsligning.

Af A. S. Bang.

---

1. Den Ligning af tredie Grad, ved hvilken Axerne bestemmes for en Flade af anden Orden med Ligningen:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Ezx + 2Fxy$$
$$+ 2Gx + 2Hy + 2Jz + K = 0,$$

kan som bekjendt skrives

$$\begin{vmatrix} A-s & F & E \\ F & B-s & D \\ E & D & C-s \end{vmatrix} = 0 \qquad (1)$$

og har, naar Koefficienterne ere reelle, 3 reelle Rødder.

I Ramus: Analytisk Geometri Pag. 229 findes den interessante Bemærkning, at Ligningen kan bringes paa Formen:

$$\frac{EF}{D(s-A)+EF} + \frac{FD}{E(s-B)+FD} + \frac{DE}{F(s-C)+DE}$$
$$-1 = 0, \qquad (2)$$

uden at der dog gjøres nogen Anvendelse af denne Omskrivning. Da man imidlertid ved Hjælp heraf faar et direkte Bevis for, at Ligningen har reelle Rødder, og tillige faar disse udskilte paa en simplere Maade end ved Cauchys Bevis, skal jeg vise, hvorledes man kan udlede Ligning (2).

Jeg vil dog strax betragte en mere almindelig Ligning end (1), hvorved den ovennævnte Sætning bliver udvidet.

2. I Determinanten

$$D = \begin{vmatrix} x & a & b_1 \\ a_1 & y & c \\ b & c_1 & z \end{vmatrix} \qquad (3)$$

betegnes Underdeterminanterne til a, b og c ved A, B og C; man kan da bevise, at

$$a_1 b_1 c_1 D = -ABC + abAB + bcBC + caCA +$$
$$(a_1 b_1 c_1 - abc)(aA + bB + cC) + (a_1 b_1 c_1 - abc)^2. \qquad (4)$$

Man faar nemlig

$$D = x(yz - cc_1) + aA + b_1(a_1 c_1 - by), \qquad (5)$$

samt
$$\left.\begin{array}{l} A = bc - a_1 z \\ B = ca - b_1 y \\ C = ab - c_1 x, \end{array}\right\} \qquad (6)$$
og indsættes nu Værdierne for x, y og z fundne af (6) i Ligning (5), fremkommer netop Ligning (4).

3. Vi ville nu betragte Ligningen:
$$\begin{vmatrix} x & a & b_1 \\ a_1 & y & c \\ b & c_1 & z \end{vmatrix} = 0, \qquad (7)$$
hvor $abc = a_1 b_1 c_1$.

Ligning (4) viser da, at (7) kan omskrives til
$$-ABC + abAB + bcBC + caCA = 0, \qquad (8)$$
eller ved Division med ABC
$$\frac{ab}{C} + \frac{bc}{A} + \frac{ca}{B} - 1 = 0;$$
anvendes dette paa Ligning (1), faar man den hos Ramus omtalte Ligning (2).

4. Ved Hjælp af det Foregaaende kan man bevise, at Ligningen:
$$\begin{vmatrix} x - \gamma & a & b_1 \\ a_1 & x - \beta & c \\ b & c_1 & x - \alpha \end{vmatrix} = 0, \qquad (9)$$
hvor $abc = a_1 b_1 c_1$ har 3 reelle Rødder, naar
$$\frac{ab}{c_1}, \ \frac{bc}{a_1} \text{ og } \frac{ca}{b_1}$$
have samme Fortegn.

Da
$$\begin{array}{l} A = bc - a_1(x - \alpha) \\ B = ca - b_1(x - \beta) \\ C = ab - c_1(x - \gamma) \end{array}$$
kan (9) omskrives til
$$\begin{array}{l} -(bc + a_1\alpha - a_1 x)(ca + b_1\beta - b_1 x)(ab + c_1\gamma - c_1 x) \\ + ab(bc + a_1\alpha - a_1 x)(ca + b_1\beta - b_1 x) \\ + ca(bc + a_1\alpha - a_1 x)(ab + c_1\gamma - c_1 x) \\ + bc(ca + b_1\beta - b_1 x)(ab + c_1\gamma - c_1 x) = 0. \end{array}$$
Sættes for Kortheds Skyld

lads

$$\frac{ab}{c_1} = c', \ \frac{bc}{a_1} = a', \ \frac{ca}{b_1} = b'$$

og $\quad a' + \alpha = a'', \ b' + \beta = b'', \ c' + \gamma = c'',$

kan den sidste Ligning skrives:

$$(x - a'')(x - b'')(x - c'') + a'(x - b'')(x - c'') + b'(x - c'')(x - a'') + c'(x - a'')(x - b'') = 0, \quad (10)$$

og om denne Ligning kunne vi bevise, at den har 3 reelle Rødder, naar a', b' og c' have samme Fortegn.

Vi ville antage, at $a'' > b'' > c''$, samt at a', b' og c' ere positive. Sættes da $x = a''$, b'', c'', $-\infty$ bliver venstre Side af Ligningen henholdsvis $+$, $-$, $+$, $-$, saa at Ligningen har 3 reelle Rødder beliggende mellem disse Grændser.

Ere a', b' og c' negative, sættes $x = +\infty$, a'', b'' og c'' som give henholdsvis $+$, $-$, $+$, $-$, saa Rødderne ogsaa i dette Tilfælde faas udskilte.

Et specielt Tilfælde af (9), hvor a', b' og c' faa samme Fortegn, har man for $a_1 = a$, $b_1 = b$ og $c_1 = c$, saa at altsaa Ligningen

$$\begin{vmatrix} x - \gamma & a & b \\ a & x - \beta & c \\ b & c & x - \alpha \end{vmatrix} = 0,$$

naar a, b og c ere reelle, har 3 reelle Rødder.

Det samme gjælder da ogsaa om Ligning (1).

Nogle Egenskaber ved plane Kurver med Ligningen $\left(\frac{r}{a}\right)^n = \sin n\theta$, hvor n er hel, positiv eller negativ.

Af I. M. Iversen.

1. At finde det geometriske Sted for de Punkter, der have den Egenskab, at Produktet af deres Afstande fra en regulær n-Kants Vinkelspidser er konstant.

Lad Polygonens største Radius være a, og lad et Punkt

være bestemt i polære Koordinater ved r og θ, idet Polygonens Centrum tages til Begyndelsespunkt og en af de største Radier til Akse. Man har da Produktet af Kvadraterne af Afstandene fra Punktet til Vinkelspidserne bestemt ved:

$$[r^2 - 2ar\cos\theta + a^2]\,[r^2 - 2ar\cos(\theta + \frac{2\pi}{n}) + a^2]\,..$$
$$...\,[r^2 - 2ar\cos(\theta + (n-1)\frac{2\pi}{n}) + a^2].$$

Dette Produkt er imidlertid identisk med

$$r^{2n} - 2a^n r^n \cos n\theta + a^{2n},$$

hvilket ses af, at den Ligning i r, der fremkommer, naar begge Størrelser sættes = o, have de samme Rødder, nemlig de 2n Værdier af

$$a(\cos n\theta \pm \sin n\theta\sqrt{-1})^{\frac{1}{n}}$$

Det søgte geometriske Sted har altsaa til Ligning:

$$r^{2n} - 2a^n r^n \cos n\theta + a^{2n} = b^{2n}, \qquad (1)$$

idet b^n er den konstante Værdi af Produktet af Afstandene. Ved at indføre retvinklede Koordinater ser man, at denne Kurve er en algebraisk Knrve af Graden 2n. For n = 1 bliver den en Cirkel, for n = 2 Cassinis Ellipse.

2. En simplere Form antager den foregaaende Ligning, naar $b^n = a^n$, ɔ: naar Produktet af Afstandene fra Polygonens Vinkelspidser er lig n'te Potens af største Radius. Den bliver da

$$r^n = 2a^n \cos n\theta, \qquad (2)$$

der ligeledes repræsenterer en algebraisk Kurve af Graden 2n (n = 1 giver Cirklen, n = 2 Lemniskaten). Den givne Polygons Vinkelspidser ere Brændpunkter i Kurven efter den almindelige Definition af Brændpunkterne som de reelle Punkter paa Tangenterne til Kurven gennem Cirkelpunkterne, hvilket uden Vanskelighed lader sig paavise. Undertiden er det bekvemmere at anvende følgende Form for Ligningen:

$$\left(\frac{r}{a}\right)^n = \sin n\theta, \qquad (3)$$

der faas ved at dreje Aksen en Vinkel $-\frac{\pi}{2n}$ og ændre $2a^n$ til

a^n. Som Ligningen viser, bestaar Kurven af n lukkede, indbyrdes kongruente Grene, der ligge i de Dele af Planen, der dannes, naar θ gennemløber Intervallerne

$$o - \frac{\pi}{n}, \quad \frac{2\pi}{n} - \frac{3\pi}{n}, \ldots \quad \frac{2p\pi}{n} - \frac{(2p+1)\pi}{n} \ldots;$$

Grenene forene sig i et Mangefoldspunkt i Begyndelsespunktet (dog undtages Cirklen, $n = 1$), hvor der bliver n Tangenter til Kurven med Ligningerne

$$\theta = o, \quad \theta = \frac{\pi}{n}, \quad \theta = \frac{2\pi}{n} \ldots, \quad \theta = (n-1)\frac{\pi}{n}.$$

r faar sin største numeriske Værdi a, naar θ er midt i et af de nævnte Intervaller.

3. Kurverne, der ere indbefattede i Ligningen (3), have nogle mærkelige Egenskaber fælles med Cirklen. Man finder saaledes, at Vinklen mellem en Tangent og Radius vektor til Røringspunktet er n Gange saa stor som Vinklen mellem samme Radius vektor og den nærmeste af Kurvens Tangenter til Begyndelsespunktet. Vinklen mellem to Tangenter er $(n+1)$ Gange Vinklen mellem Radii vektores til Berøringspunkterne. Krumningsradius ϱ er bestemt ved

$$\varrho r^{n-1} = \frac{a^n}{n+1}.$$

For Cirklen $(n = 1)$ bliver ϱ konstant, for Lemniskaten $(n = 2)$ bliver den omvendt proportional med Radius vektor. Krumningscentrets Projektion paa Radius vektor deler denne indvendig i Forholdet $\frac{1}{n}$; for Cirklen blive de to Dele lige store.

De her nævnte Egenskaber gælde ogsaa, naar n er positiv brudden, saaledes for $n = \frac{1}{2}$ (Kardioiden). De lade sig alle let paavise ved de almindelige Methoder.

4. Naar $r_1, r_2, r_3 \ldots r_n$ betegne Afstandene fra et Punkt i Kurven til de n Brændpunkter, der ere nævnte i 2, har man i Følge 1 og 2

$$r_1 r_2 r_3 \ldots r_n = \text{en Konstant.}$$

Ved at tage det logaritmiske Differential heraf med Buen s som uafhængig Variabel faar man:

$$\frac{1}{r_1}.\frac{dr_1}{ds}+\frac{1}{r_2}.\frac{dr_2}{ds}+\ldots+\frac{1}{r_n}.\frac{dr_n}{ds}=0.$$

Nu er $\frac{dr_1}{ds}=\cos\alpha_1$, idet α_1 er Vinklen mellem r_1 og Tangenten til Punktet, og Ligningen udtrykker da, at Summen af de reciproke Værdier af de Stykker af en Tangent (regnede fra Røringspunktet), der afskæres af Linjer, vinkelrette paa Røringspunktets Brændstraaler i Brændpunkterne, er lig Nul. Stykkerne maa naturligvis regnes med modsat Fortegn, eftersom de ligge paa den ene eller den anden Side af Røringspunktet. For Cirklen er der kun eet saadant Stykke, der altsaa er $=\infty$, ɔ: Tangenten er selv vinkelret paa Radius vektor til Brændpunktet (Centrum). For Lemniskaten blive de to Stykker, der afskæres af de vinkelrette paa Brændstraalerne, lige store.

Den her nævnte Sætning gælder iøvrigt for alle Kurver, hvis Punkter have den Egenskab, at Produktet af deres Afstande fra n Punkter er konstant, da det givne Bevis ikke forudsætter, at de n Punkter have nogen speciel Beliggenhed. Den gælder saaledes for alle Kurverne med Ligningen (1).

5. Et Par af de mærkelige Fgenskaber, der ere karakteristiske for Cykloiden, genfinder maa hos alle Hjullinjer, der frembringes af Polen (Mangefoldspunktet) i en af Kurverne (3), naar Kurven ruller paa en ret Linje, saaledes det simple Forhold mellem Hjulliniens og den rullende Kurves Arealer.

Kaldes nemlig to konsekutive Punkter af Hjullinien P og P_1, de tilsvarende Røringspunkter mellem den rette Linje og den rullende Kurve M og M_1, saa ere PM og P_1M_1 baade Radii vektores i den rullende Kurve og Normaler til Hjullinien. Det Arealelement af Hjullinien, der ligger mellem denne, den rette Linje og de to Normaler, bestaar da af de to Trekanter P_1MM_1 og MPP_1. Den førstes Areal er $\frac{1}{2}r^2\,d\theta$, den andens $\frac{1}{2}r^2\,.\angle PMP_1$; den sidste Vinkel er imidlertid lig ··· klen mellem de to konsekutive Tangenter til den rullende

Kurve, altsaa ifølge $3(n+1)\,d\theta$. Det nævnte Arealelement bliver altsaa $(n+2)\,.\,\frac{1}{2}r^2\,d\theta = (n+2)\,dA$, idet dA er det Arealelement af den genererende Kurve, der indesluttes af denne og de to Radii vektores. Ved Integration følger heraf, at det Areal, der ligger mellem Hjullinien, den rette Linje og to Normaler, er $(n+2)$ Gange det Areal, der indesluttes af den genererende Kurve og de to Radii vektores, der svare til de to Normaler. Anvendes dette f. Eks. paa en af Sløiferne i Kurverne (3), ses det, at det Areal, der indesluttes mellem en Bugt af Hjullinjen og den rette Linje, er $(n+2)$ Gange Sløjfens Areal. For Cykloiden faas det bekendte Resultat $(n+2=3)$.

I Cykloiden er som bekendt Krumningsradius lig det dobbelte af den rullende Cirkels Radius vektor; ogsaa denne Sætning har sit Sidestykke ved Kurverne (3). Forlænges nemlig PM og P_1M_1 til de skære hinanden i R, er Krumningsradius $PR = \frac{PP_1}{\angle PRP_1}$. Men

$$PP_1 = PM\,.\,\angle PMP_1 = r\,.\,(n+1)\,d\theta,$$

og

$$\angle PRP_1 = \angle PMP_1 - \angle MP_1R = n\,d\theta;$$

altsaa er Krumningsradius i Hjullinjen

$$r\left(1+\frac{1}{n}\right),$$

for Cykloiden altsaa $2r$.

Ogsaa disse Sætninger gælde, naar n er positiv, brudden.

6. At finde det geometriske Sted for de Punkter, der have den Egenskab, at Produktet af deres Afstande fra en regulær 2n-Kants største Radier er konstant.

Det drejer sig i denne Opgave i Virkeligheden kun om n Afstande, da de største Radier to og to falde i hinandens Forlængelser. Med lignende Betegnelser som i 1 bliver Kurvens Ligning:

$$r^n \sin\theta \sin\left(\theta+\frac{\pi}{n}\right)\sin\left(\theta+2\,.\,\frac{\pi}{n}\right)\ldots\sin\left[\theta+(n-1)\,\frac{\pi}{n}\right] = b^n.$$

Nu er (Ramus: Differential- og Integralregning IV, 66)

$$\sin\theta \sin\left(\theta + \frac{\pi}{n}\right) \sin\left(\theta + 2 \cdot \frac{\pi}{n}\right) \ldots \sin\left(\theta + (n-1) \cdot \frac{\pi}{n}\right)$$
$$= \frac{\sin n\theta}{2^{n-1}},$$

og Kurvens Ligning bliver altsaa ved Ændring af Konstanten b:

$$\left(\frac{r}{b}\right)^{-n} = \sin n\theta. \qquad (4)$$

Denne Ligning fremstiller en algebraisk Kurve af Graden n. Denne Kurve har n Grene, liggende i de samme Intervaller for θ, der omtaltes ved Kurverne (3); men Grenene ere her uendelige, og Tangenterne til Mangefoldspunktet i (3) ere her Asymptoter. $n = 1$ giver en ret Linje, $n = 2$ en ligesidet Hyperbel.

7. Naar Radii vektores i (3) og (4) for samme Værdi af θ betegnes med r og r_1, har man:

$$\left(\frac{r}{a}\right)^{n} = \sin n\theta, \quad \left(\frac{r_1}{b}\right)^{-n} = \sin n\theta, \text{ altsaa:}$$

$$r r_1 = ab.$$

De to Kurver ere altsaa inverse Kurver.

Værdien $r = \frac{ab}{r_1}$ maa tilfredstille Ligningen (3), ogsaa i den oprindelige Skikkelse, hvori den udtrykte, at Produktet af et af Kurvens Punkters Afstande fra Brændpunkterne er konstant, idet Hensyn tages til de Ændringer, hvorved Ligningen omformedes til (3). Derved faas en ny Egenskab for Kurverne (4); imidlertid findes denne Egenskab lettere direkte af Ligningen (4). Drejes nemlig Koordinataksen Vinklen $\frac{\pi}{2n}$, og sættes $b = \frac{b_1}{\sqrt[n]{2}}$, bliver Ligningen:

$$-2r^n \cos n\theta + b_1^n = 0.$$

Multipliceres denne Ligning med b_1^n, og adderes paa begge Sider r^{2n}, bliver den:

$$r^{2n} - 2b_1^n r^n \cos n\theta + b_1^{2n} = r^{2n}.$$

Ifølge 1 udtrykker denne Ligning, at Produktet af Afstandene fra et Punkt i (4) til Vinkelspidserne i en regulær Pylogon,

hvis største Radius ($b_1 = b\sqrt[n]{2}$) danner Vinklen $\frac{\pi}{2n}$ med den oprindelige Akse, og hvis Centrum falder i Begyndelsespunktet, er = n'te Potens af Afstanden fra Centrum. Vinkelspidserne i denne Polygon ere Brændpunkter i Kurven, hvilket uden Vanskelighed lader sig vise. De ligge i Afstanden $b\sqrt[n]{2}$ fra Begyndelsespunktet, medens Brændpunkterne for (3) have Afstanden $\frac{a}{\sqrt[n]{2}}$. For den ligesidede Hyperbel bliver den nævnte Sætning: Produktet af Brændstraalerne er lig Kvadratet af Afstanden fra Centrum. Ogsaa for den rette Linje $\left(\frac{r}{b}\right)^{-1} = \sin\theta$ eller $y = b$ er den rigtig, idet den her udtrykker, at ethvert Punkt i den rette Linje har ligestor Afstand fra Centrum og fra Punktet (0,2b).

Omvendt kan man indsætte $r_1 = \frac{ab}{r}$ i (4); men lettere ændres som før (3), idet den sættes paa Formen:

$$r^{2n} = a^n r^n \sin n\theta$$

$$= 2^{n-1} a^n r^n \sin\theta \sin\left(\theta + \frac{\pi}{n}\right) \sin\left(\theta + 2\,.\,\frac{\pi}{n}\right) \ldots \sin\left[\theta + (n-1)\frac{\pi}{n}\right),$$

hvorved ifølge 6 udtrykkes, at Produktet af Afstandene fra et Punkt i (3) til Tangenterne til Begyndelsespunktet er $\frac{r^{2n}}{2^{n-1}a^n}$.

8. De i 3 nævnte Egenskaber ved Kurverne (3) findes ogsaa ved Kurverne (4) og kunne tildels udledes af, at (3) og (4) ere inverse Kurver. Dog ere enkelte Ændringer nødvendige Saaledes er Vinklen mellem 2 Tangenter her (n — 1) Gange Vinklen mellem Radii vektores til Røringspunkterne, hvilket følger af det forandrede Fortegn for n. Af samme Grund findes Krumningsradius ved Ligningen

$$\varrho\, r^{-n-1} = \frac{1}{(-n+1)b^n} \quad \text{ɔ:} \quad \varrho = \frac{r^{n+1}}{(n-1)b^n}.$$

Krumningscentrets Projection paa Radius vektor deler denne udvendigt i Forholdet $\frac{1}{n}$.

Disse Egenskaber kunne anvendes paa den rette Linje og

den ligesidede Hyperbel, ligesom de ogsaa gælde for n brudden, saaledes for $n = \frac{1}{2}$ (Parablen med Brændpunktet til Pol).

9. Afstandene fra et Punkt i en ligesidet Hyperbel til Brændpunkterne have en konstant Differens. For alle Kurver (4), for hvilke n er lige, findes en tilsvarende Sætning. Lægger man nemlig Aksen gennem et Brændpunkt og ombytter n med 2n, faar man, naar Brændstraalerne for et Punkt i den naturlige Rækkefølge kaldes $f_1, f_2, f_3 \ldots f_{2n}$, og Afstanden fra et Brændpunkt til Centrum er a:

$$(f_1 f_3 \ldots f_{2n-1})^2$$
$$= [r^2 - 2ar\cos\theta + a^2]\,[r^2 - 2ar\cos(\theta + \frac{2\pi}{n}) + a^2]\ldots$$
$$\ldots[r^2 - 2ar\cos(\theta + (n-1)\frac{2\pi}{n}) + a^2]$$
$$= r^{2n} - 2a^n r^n \cos n\theta + a^{2n}.$$
$$(f_2 f_4 \ldots f_{2n})^2$$
$$= [r^2 - 2ar\cos(\theta + \frac{\pi}{n}) + a^2]\,[r^2 - 2ar\cos(\theta + \frac{3\pi}{n}) + a^2]\ldots$$
$$\ldots[r^2 - 2ar\cos(\theta + (2n-1)\frac{\pi}{n}) + a^2]$$
$$= r^{2n} + 2a^n r^n \cos n\theta + a^{2n}.$$

Adderer man disse Ligninger og subtraherer $2 f_1 f_2 f_3 \ldots \ldots f_{2n}$, der ifølge 7 er $= 2r^{2n}$, faar man:

$$f_1 f_3 \ldots f_{2n-1} - f_2 f_4 \ldots f_{2n} = \pm (a\sqrt[2n]{2})^n = \pm b^n,$$

idet b har samme Betydning som i 6 og 7. Analogien med den ligesidede Hyperbel er klar.

10. Naar Afstandene fra et Punkt i (4) til Asymptoterne kaldes $p_1, p_2 \ldots p_n$, har man

$$p_1 p_2 \ldots p_n = \text{en Konstant.}$$

Tager man det logaritmiske Differential heraf med Buen s som uafhængig Variabel, faar man:

$$\frac{1}{p_1} \cdot \frac{dp_1}{ds} + \frac{1}{p_2} \cdot \frac{dp_2}{ds} + \ldots + \frac{1}{p_n} \cdot \frac{dp_n}{ds} = 0.$$

Nu er $\frac{dp_1}{ds}$ = Sinus til den Vinkel, som Tangenten danner med vedkommende Asymptote, og Ligningen udtrykker alt-

saa, at Summen af de reciproke Værdier af de Stykker af en Tangent (regnede fra Røringspunktet), der afskæres af Asymptoterne, er lig Nul. Stykkerne maa regnes med Fortegn. For den ligesidede Hyperbel blive de to Stykker ligestore.

Denne Sætning gælder i Almindelighed for alle Kurver, hvis Punkters Afstande fra n rette Linjer have konstant Produkt; thi ogsaa i dette Tilfælde blive de n rette Linjer Kurvens Asymptoter.

Et Bevis for Eulers Sætning om Polyedre.

Af C. Crone.

Professor Petersen beviser i sin Stereometri denne Sætning for konvexe Polyedre ved at betragte Polyedrets retvinklede Billede paa en Plan og udtrykke, at Summen af Vinklerne paa Polyedrets Overflade bliver uforandret ved Afbildningen.

Polyedrets Billede kan imidlertid ogsaa paa en anden Maade benyttes til at bevise Sætningen. Er det f. Ex. et vandret Billede, ville Billederne af Polyedrets Over- og Underside være 2 kongruente Polygoner, der ved brækkede Linier, som kun støde sammen i Billeder af Vinkelspidser, ere delte i mindre Polygoner. Tallet d = Antallet af Polygoner + Antallet af Vinkelspidser — Antallet af Sider er det samme paa Polyedrets Overflade og i dets Billede, og = Summen af Tallene d for de 2 omtalte kongruente Polygoner, idet saavel Siderne som Vinkelspidserne i disses Omkredse parvis falde sammen i Polyedrets Billede. Deler man en Polygon ved brækkede Linier, af hvilke hver forbinder 2 Vinkelspidser, og som ikke skjære hverandre, i flere Polygoner, disse igjen paa samme Maade i flere o. s. v., vil altid Tilføielsen af en af p Stykker bestaaende brækket Linie indføre 1 ny Polygon, p—1 nye

Vinkelspidser og p nye Sider, altsaa ikke forandre Tallet d. Da d for en enkelt Polygon er = 1, bliver det følgeligt for Polyedrets Billede og for Polyedret selv = 2.

Litteraturanmeldelse.

Émile Picard, traité d'Analyse. t. II.
(Fonctions harmoniques et fonctions analytiques.
Introduction à la théorie des équations differentielles et
fonctions algébriques.)
(Gauthiers Villars et fils. Paris 1892—93.)

Det i 1891 udkomne første Bind er nu fortsat med 2det Bind, hvis Indhold i korteste Form angives ved den ovenfor anførte Undertitel. Derved faar man dog kun en ufuldstændig Forestilling om den Rigdom af Gjenstande, som behandles tildels paa en omfattende Maade. Men Bogens Fortrin bestaar ikke alene deri, at den giver Besked om saa meget; Behandlingen udmærker sig ved Siden af en ofte overraskende Klarhed (f. Ex. ved Beviset for den efter Forf. opkaldte Sætning i Funktionslæren) ogsaa ved det fortræffelige Princip, at sammenligne de forskjellige Methoder paa en indgaaende Maade. Saaledes er det særdeles interessant at sé de forskjellige Løsninger af Laplaces Ligning for Potentialet, eller de forskjellige Bevismaader for, at en Differentialligning har et Integral, fremsatte og kritiserede. At der paa disse og mange andre Steder findes adskilligt, der skyldes Forf., er en Selvfølge. Naar Forf. i Indledningen omtaler, at Planen for Værket (der oprindelig nærmest skulde have behandlet Differentialligningernes Theori) har udvidet sig under Udarbejdelsen, kan man kun glæde sig derover, da det i det Hele vistnok er en Sjeldenhed

i Lærebogslitteraturen at faa et Materiale, hvoraf saa meget er af ganske ny Datum, behandlet paa en saa tilgængelig og gjennemgaaende exact Maade. (C. J.)

Løste Opgaver.

29. Paa hvilken Kurve maa man lade $R \sin^2 2\theta = a$ rulle. for at Polen kan gennemløbe en ret Linie; hvilken Kurve vil ved Rulningen frembringes af Polaraxen? (C. J.)

Opløsning: For den givne Kurve er M Vinklen mellem Radius vektor og Tangenten S Buelængden, medens der for den søgte Kurve benyttes Betegnelserne r, θ, μ, s.

Tages den Linie, som Polen til den givne Kurve skal gennemløbe, til Polaraxe for den søgte Kurve, ser man, at der i en Stilling af Kurverne dannes en retvinklet Trekant med Sider: den sidstnævnte Polaraxe, R og r og med de to Vinkler θ og $\mu + M$. Heraf og af s = S faas da:

$$r \sin\theta = R;\ \mu + M = 90 - \theta;\ \frac{dr}{\cos\mu} = \frac{dR}{\cos M}$$

hvoraf $dR \cos(90 - \theta - M) = dr \cos M$, der let reduceres til:

$$R - \frac{1}{4}\sqrt{r^2 - R^2}\sqrt{\frac{a}{R-a}} = \frac{r\,dr}{dR}$$

sættes heri: $r^2 - R^2 = z^2$, faas:

$$dz = -\frac{\sqrt{a}}{4}\frac{dR}{\sqrt{R-a}}.$$

Ved Integrationen skal Konstanten bestemmes saaledes, at for $r = a$, $\theta = 90^0$ er $R = a$. Man faar da, at den søgte Kurve er Parablen:

$$r^2 \cos^2\theta = \frac{a}{4}(r \sin\theta - a).$$

Ved Betragtning af den ovennævnte Trekant ses det nu, at, naar Parablens Ligning skrives $x^2 = \frac{a}{4}(y - a)$, vil den givne Kurves Polaraxe under Rulningen stadig gaa gennem Punkterne (x, o) (o, y). Ligningen for en saadan Linie vil faa

Formen: $$\frac{x}{\alpha} + \frac{by}{\alpha^2} = 1.$$

Det vil da vise sig, at Indhyllingskurven er en Parabel.

(H. S. Nielsen.)

(Ogsaa løst af M. J.)

33. Af to Tal A og B dannes to andre dels ved at multiplicere dem, dels ved at stille B bag ved A. Af de nye Tal skal det ene være et Multiplum af det andet. Find A og B, idet B er primisk med 10.

(P. A. Larsen.)

Opløsning: De to Tal blive AB og $B + 10^n A$, idet B har n Cifre.

Man faar da enten Ligningen

$$AB = p(B + 10^n A),$$

hvoraf $$B = \frac{p \cdot 10^n A}{A - p} = p \cdot 10^n + \frac{p^2 10^n A}{A - p},$$

der er større end 10^n, saa at Ligningen ikke tilfredstilles af hele Tal, da $10^n > B > 10^{n-1}$,

eller $$B + 10^n A = pAB;$$

her ses A at gaa op i B, og da B er primisk med 10^n, gaar B ogsaa op i A; man maa derfor have A = B og Ligningen

giver da: $$A = B = \frac{10^n + 1}{p}.$$

Da $B > 10^{n-1}$, faas $10^n + 1 > p\,10^{n-1}$, eller $p < 10 + \frac{1}{10^{n-1}}$

eller $p \leq 10$, men af Tallene 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, kan kun 7 gaa op i Tal af Formen $10^n + 1$; n kan imidlertig ikke være vilkaarlig, den lavest mulige Værdi er 3, (da $1001 = 7 \cdot 143$). Den laveste Værdi af p, for hvilken $10^p \equiv 1 \pmod 7$, er p = 6. $10^n + 1$ kan da skrives $10^6 \cdot 10^{n-6} + 1$ og Resten med 7 bliver $10^{n-6} + 1$.

Gaar 7 altsaa op i $10^{n-6}+1$, gaar det ogsaa op i $10^{n}+1$, men gaar 7 op heri, gaar det ogsaa op i $10^{n+6}+1$ o. s. v.

Altsaa maa $10^{n}+1$ være af Formen $10^{3+6q}+1$, og man har:

$$A = B = \frac{10^{3+6q}+1}{7}$$

Den laveste Værdi for A og B er

$$\frac{10^{3}+1}{7} = 143.$$

[Opgavestilleren har bemærket at den almindeligste Form for de søgte Tal er

$$A = B = 14(285714)3,$$

hvor Tallene indenfor Paranthesen er en Periode].

H. C. Olsen.

[Ogsaa løst af H. S. Nielsen].

36. Læg en ret Linie i given Retning, saa at hele det paa denne mellem to givne Cirkler afskaarne Stykke fra et af disses Skæringspunkter ses under en given Vinkel. (T. Bonnesen.)

Opløsning: Cirklerne α og β have A til det ene Skæringspunkt, den søgte Linje er PQ, PQ skærer α anden Gang i R og QAs Forlængelse skærer α anden Gang i S; Trekanten QRS er nu ligedannet med Trekanten QAP, $\angle$ SRQ er lig den givne Vinkel QAP = v. Vi kende nu Retningen RS, og søge vi Centrum T for Trekanten QRS's omskrevne Cirkel, have vi straks et geometrisk Sted for dette Punkt i en Linje fra α's Centrum, vinkelret paa RS. TS skærer α anden Gang i M, og TQ skærer β anden Gang i N. Da nu Trekant QST har en bekendt Form, kan først M og N bestemmes ved fra A at afsætte Buerne $2v - 180^{0}$ paa de givne Cirkler, T bestemmes saa ved en Cirkelbue over MN som Korde, rummende en Vinkel $360^{0} - 2v$. Denne Cirkelbue skærer det andet Sted for T i to Punkter, svarende til to Løsninger af Opgaven. TN kan nu drages, og et Punkt B af den søgte rette Linje er fundet. (Magnus Ruben.)

37. Læg en ret Linje, saa at hele det paa denne mellem to givne Cirkler afskaarne Stykke fra et af disses Skæringspunkter ses under en given Vinkel og tillige af en given ret Linie gennem dette Punkt deles i et givet Forhold.

(T. Bonnesen.)

Opløsning: Vedkommende Skæringspunkt for de to Cirkler α og β er A, den søgte Linje er PQ, Parallelogrammet APRQ, hvor PQ er Diagonal, tænkes fuldført. Den givne Linje skærer PQ i AO og endvidere PR i M og QR i N.

Vi have nu: $\frac{AO}{MO} = \frac{QO}{PO} = m = \frac{NO}{AO}$.

Vi kunne altsaa tegne en Figur, ligedannet med den søgte, idet vi paa den givne Linje bestemme en Række Punkter A, O_1, M_1 og N_1 der have Afstande, staaende i de rigtige Forhold til hverandre. For at bestemme det til P svarende Punkt P_1 tegnes en Cirkelbue over AM_1 som Korde og en Cirkelbue over AN_1 som Korde, begge rummende en Vinkel, der er den givnes Suplementvinkel, og den sidste Cirkelbue multipliceres med $\frac{1}{m}$ m. H. t. O_1.

AP_1 skærer α i P, og Q bestemmes paa tilsvarende Maade.

(Magnus Ruben.)

Opgave til Løsning.

---

44. Find Summen af Rækken

$$S = 1^2 \binom{2n+1}{2} a^2 + 2^2 \binom{2n+1}{4} a^4 + 3^2 \binom{2n+1}{6} a^6 + \ldots$$
$$+ p^2 \binom{2n+1}{2p} a^{2p} + \ldots + k^2 \binom{2n+1}{2n} a^{2n}$$

Ex. $a = 1$.

(H. C. Olsen.)

Nogle Bemærkninger om Bestemmelsen af Asymptoterne til Kurver bestemte ved en Differentialligning af første Orden.

Af H. G. Zeuthen.

Retningskoefficienten α til en Asymptote til en Kurve, som tilfredsstiller en Differentialligning af første Orden

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = o,$$

maa bestemmes ved at indsætte

$$\alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

i den Ligning, hvortil den forelagte reduceres, naar x og y voxe i det uendelige, altsaa hvis den forelagte Ligning er algebraisk i x og y, i den, som dannes af Leddene af højeste Grad.

For at de Asymptoter, som tilhøre de Kurver, der fremstilles ved de forskjellige partikulære Integraler, skulle kunne faa alle mulige Retninger, maa den saaledes dannede Ligning være identisk. Ellers faa Asymptoterne visse fælles Retninger. Dette bliver saaledes Tilfældet, naar Ligningen er homogen, hvis blot $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x}$, som vilde give en vilkaarlig ret Linie gjennem Begyndelsespunktet, ikke er Faktor i dens venstre Side.

Da det for de homogene Ligningers Vedkommende bliver ligegyldigt, om x og y ere endelige eller uendelige, vil iøvrigt her $y = \alpha x$ tillige fremstille et Integral i Differentialligningen, partikulært eller singulært. Da den homogene Ligning fremstiller en Række ligedannede Kurver, vil i sidste Tilfælde den, hvis Berøringspunkt med $y = \alpha x$ er uendelig fjærnt, og som altsaa har $y = \alpha x$ til Asymptote, selv fjerne sig i det uendelige.

Vanskeligere end at bestemme Retningen er det af Differentialligningen at udlede den nærmere Bestemmelse af Asymptoter, hvis Retning allerede er bekjendt. Det maa da afgøres, om de Kurver, der fremstilles ved de partikulære Integraler have en fælles Asymptote, eller om de have hver sin. Jeg skal

ikke her indlade mig paa en almindelig Undersøgelse af dette Spørgsmaal, men blot fremdrage nogle Exempler, som, skjønt de kun ere tagne fra homogene Ligninger, give gode Bidrag til at oplyse, hvorledes det idet hele forholder sig med denne Sag. De kunne maaske foranledige andre til en mere almindelig Undersøgelse.

Det Exempel, som er min nærmeste Anledning til at komme ind paa denne Sag, findes i Opgave 2 til 41de *Leçon* i Sturm: *Cours d'Analyse,* der gaar ud paa at finde de retvinklede Trajektorier til Cirkler indskrevne i en ret Vinkel og bestemme disse Trajektoriers Asymptote uden at integrere. Man finder let, at Trajektorierne maa have Asymptoter parallele med Centerlinien til Cirklerne, og selve Opgavens Ordlyd tyder hen paa, at denne Linie er fælles Asymptote for alle Trajektorier. Et virkeligt Bevis herfor er, som her vil blive vist, heller ikke vanskeligt; men det turde dog ligge udenfor, hvad man i Reglen kan vente af de Læsere, for hvem Bogen nærmest er bestemt.

For Asymptotebestemmelsens Skyld vil det være bekvemmest at tage den Linie, der indeholder Cirklernes Centre til Abscisseaxe, Halveringslinien af den givne rette Vinkels Nabovinkel til Ordinataxe. Trajektorierne faa da følgende Differentialligning

$$y + x\frac{dy}{dx} \pm \sqrt{2(x^2 - y^2)}\frac{dy}{dx} = 0.$$

Indsættelse af $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ giver en Ligning, hvis eneste reelle Løsning er $y = 0$. De søgte Asymptoter maa da være parallele med x-Axen eller falde sammen med den.

Vi skulle nu prøve, om Linien $y = k$ kan være Asymptote til nogen af Kurverne. Den maatte da være Tangent i Punktet $x = \infty$, $y = k$. Denne Tangent ville vi søge at bestemme. Det Stykke n, som Tangenten i et vilkaarligt Punkt afskjærer paa y-Axen, er

$$n = y - x\frac{dy}{dx} = y\frac{2 \pm \sqrt{2\left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right)}}{1 \pm \sqrt{2\left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right)}},$$

altsaa for det omtalte uendelig fjerne Punkt

$$n = k\frac{2 \pm \sqrt{2}}{1 \pm \sqrt{2}}.$$

Hvis nogen af de herved bestemte to Tangenter skulde falde sammen med $y = k$, maatte man imidlertid have $n = k$. Dette kan ikke finde Sted, naar $k \gtrless 0$. Ingen af de to Kurver i Systemet, som gaa igjennem Punktet $x = \infty$, $y = k$, kan altsaa have Linien $y = k$ til Asymptote, hvad der kun kan forklares saaledes, at de helt og holdent ligge uendelig fjernt.

At nu $y = 0$ virkelig bliver Asymptote til Systemets Kurver, ses, idet vi foreløbig kun holde os til positive x, deraf, at for øverste Fortegn $\frac{dy}{dx}$ faar modsat Tegn af y. En af de Kurver, som gaa gjennem et vilkaarligt Punkt (x, y), vil altsaa nærme sig til Linien $y = 0$, medens x voxer i det uendelige, og da den hverken kan naa den eller faa nogen anden Linie $y = k$ til Asymptote, faar den selve Abscssieaxen til Asymptote. De Kurver, som svare til negative x, ere kongruente med dem, som svare til positive x.

Om Kurvernes Udseende er det iøvrigt tilstrækkeligt at bemærke, at de i Begyndelsespunktet berøre Abscisseaxen, have Tilbagegangspunkter paa den givne rette Vinkels Ben og dernæst nærme sig til $y = 0$ som Asymptote. Tages Begyndelsespunktet til Inversionscentrum vil Systemet af Trajektorier, ligesom det givne Cirkelsystem, selv indeholde de inverse Kurver til Systemets. —

Som et Exempel, der oplyser Forskjellen mellem Bestemmelsen ved en Differentialligning af Kurver med en fælles Asymptote og af Kurver med parallele Asymptoter, kan benyttes den, som til fuldstændigt Integral har

$$x(y - c) = c^2.$$

Denne vil nemlig fremstille en Række Hyperbler med den fælles Asymptote $x = 0$, og med de parallele Asymptoter $y = c$.

Differentialligningen bliver

$$x^2 \frac{dy}{dx} + \left(y + x \frac{dy}{dx}\right)^2 = 0.$$

Indsættelse af $$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

giver $$x^2 y + 4 y^2 x = 0$$

eller $$x y (x + 4 y) = 0.$$

$x + 4 y = 0$ er et singulært Integral eller fremstiller en Indhyllingskurve for Hyperblerne i Systemet. Som alt bemærket fjerner derfor den Hyperbel, der berører denne i et uendelig fjernt Punkt, sig i det uendelige. Derimod er $xy = 0$ den til $c = 0$ svarende Hyperbel i Systemet og $x = 0$ og $y = 0$ blive partikulære Integraler. Vi skulle af Differentialligningen udlede, hvorvidt en Parallel med en af disse Linier kan være Asymptote til en Kurve i Systemet, som ikke selv fjerner sig i det uendelige.

For at undersøge, om $y = k$ kan være Asymptote til nogen Kurve i Systemet, skulle vi da atter søge det Stykke n, som Tangenten i Punktet (x, y) afskjærer paa Ordinataxen.

Af $$n = y - x \frac{dy}{dx}$$

og Differentialligningen udledes

$$n = \frac{\sqrt{4y + x}}{2} (\sqrt{4y + x} \pm \sqrt{x}).$$

Dette Udtryk vil for øverste Fortegn i alle Tilfælde give $n = \infty$, naar x voxer i det uendelige. For at se, hvad det i samme Tilfælde giver for nederste Fortegn skulle vi omskrive det til

$$n = \frac{x}{2} \sqrt{1 + \frac{4y}{x}} \left(\sqrt{1 + \frac{4y}{x}} - 1\right),$$

og udvikle første Led i sidste Faktor efter Binomialformlen. Man finder da for $x = \infty$, $y = k$, at $n = k$, stemmende med, at $y = k$ virkelig er Asymptote til en Kurve i Systemet, nemlig den, som bestemmes ved at sætte $c = k$.

Ville vi dernæst undersøge, om ogsaa $x = k$ kan være Asymptote til en Kurve i Systemet, som ikke fjerner sig i det uendelige, skulle vi først søge det Stykke

$$m = x - y\frac{dx}{dy},$$

som Tangenten i (x, y) afskjærer paa Abscisseaxen. Af denne Ligning og Differentialligningen udledes

$$ym^2 - x(4y + x)m + x^2(4y + x) = 0,$$

som for $y = \infty$, $x = k$ reduceres til

$$m^2 - 4km + 4k^2 = 0$$

og altsaa giver $m = 2k$. For at $x = k$ skulde være Asymptote, skulde den give $m = k$. Dette finder kun Sted for $k = 0$, og $x = 0$ bliver altsaa den eneste Asymptote med denne Retning. Da Differentialligningen kun giver reelle Værdier af $\frac{dx}{dy}$, naar x og $4x + y$ have samme Fortegn, hvilket for tilstrækkelig store Værdier af $\frac{y}{x}$ kræver, at x og y have samme Fortegn, og da $\frac{dx}{dy}$ er negativ, ses det allerede af Differentialligningen — at alle Systemets Kurver, naar y nærmer sig $\pm \infty$, ville nærme sig til Linien $x = 0$. Denne maa altsaa virkelig være Asymptote til alle Systemets Kurver.

Nouvelles démonstrations d'un théorème de probabilité.

(Par W. A. Wythoff.)

Dans le no. 2 de cette année du »Nyt Tidsskrift for Mathematik« (B) M. Carl Heumann démontre la proposition suivante:

Ett obegränsadt plan är genomdraget af parallela linier, hvilkas inbördes afstånd är 2a. Om en skifva begränsad af en sluten konvex kontur af hvilken form som helst, hvars størsta diameter är $< 2a$, kastas på det ifrågavarande planet,

så är sannolikheten att den råkar en linie $= \frac{l}{2\pi a}$, då l betyder konturens hela längd.

Je veux donner ici deux autres méthodes de démontrer la même proposition.

I.

Prenons sur le disque un point quelconque O et une direction OX. Soit OZ la perpendiculaire de O sur les droites parallèles données, P et P' les deux points de la courbe dont les tangentes sont parallèles à ces droites, A et A' les points d'intersection des tangentes en P et P' avec OZ. Désignons par φ l'angle XOZ, par p et p' les distances OA et OA'.

Toutes les directions possibles que OX peut avoir par rapport aux droites données étant a priori également probables, la probabilité que la valeur de φ soit comprise entre une valeur quelconque φ_1 et $\varphi_1 + d\varphi$ est évidemment $\frac{d\varphi}{2\pi}$.

Puis on voit facilement, que pour une valeur determinée de φ le disque touchera une des droites données, quand le point O a une distance $< p$ de l'un côté on une distance $< p'$ de l'autre côté d'une de ces droites. Donc, dans ce cas la probabilité qu'une des droites soit touchée est $\frac{p + p'}{2a}$.

La probabilité cherchée, que nous designerons par x, est donc

$$x = \int_0^{2\pi} \frac{p + p'}{2a} \cdot \frac{d\varphi}{2\pi} = \frac{1}{4\pi a} \int_0^{2\pi} (p + p')\, d\varphi$$

$$= \frac{1}{4\pi a} \left\{ \int_0^{2\pi} p\, d\varphi + \int_0^{2\pi} p'\, d\varphi \right\}$$

ou, les deux dernières intégrales étant égales,

$$x = \frac{1}{2\pi a} \int_0^{2\pi} p\, d\varphi.$$

Menons maintenant par O une droite parallèle à la tangente PA et par P la normale à la courbe. Soit B le point d'intersection de ces deux droites, M le centre de courbure de la courbe en P.

Désignons par

r le rayon de courbure MP,

u la distance MB (positive quand M se trouve entre P et B, négative dans le cas contraire),

s la longueur de la courbe, comptée à partir d'un point fixe quelconque,

z = OB = PA (positive quand la direction PA sur la tangente correspond avec la direction positive sur la courbe).

Alors on a $p = r + u.$

Donc $x = \frac{1}{2\pi a}\int_0^{2\pi} r\,d\varphi + \frac{1}{2\pi a}\int_0^{2\pi} u\,d\varphi.$

Or il est évident qu'on a, en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur,

$$r\,d\varphi = ds \qquad u\,d\varphi = d\,.\,OB = dz.$$

Donc $x = \frac{1}{2\pi a}\int ds + \frac{1}{2\pi a}\int dz$

les deux intégrales prises le long du contour.

La première intégrale est évidemment = 1, la seconde est zéro.

La probabilité cherchée est donc

$$x = \frac{1}{2\pi a}.$$

II.

Nous avons vu, que la probabilité cherchée peut se mettre sous la forme

$$x = \frac{1}{4\pi a}\int_0^{2\pi} (p + p')\,d\varphi.$$

$p + p'$ est la projection de l'arc P'P (que nous prenons dans le sens positif) sur la droite OZ.

Désignons par ψ l'angle que la tangente dans un point quelconque Q de l'arc P'P fait avec OX, d'où résulte que cette tangente fait avec OZ l'angle $\varphi - \psi$

Alors nous avons

$$p + p' = \int_{P'}^{P} \cos(\varphi - \psi)\, ds$$

et par conséquence

$$x = \frac{1}{4\pi a} \int_0^{2\pi} \int_{P'}^{P} \cos(\varphi - \psi)\, d\varphi\, ds,$$

dont l'intégration doit être faite d'abord par rapport à s et ensuite par rapport à φ, puisque les limites P' et P dépendent de φ.

Nons voulons changer l'ordre des intégrations et par suite mettre x sous la forme

$$x = \frac{1}{4\pi a} \int \int \cos(\varphi - \psi)\, ds\, d\varphi,$$

dont il s' agit maintenant de trouver les limites.

Or il est évident que chaque élément ds de la courbe doit être compris dans l'intégration et que donc l'intégration par rapport à s doit s'étendre de o à l. D'ailleurs on voit que pour un élément quelconque ds l'angle $\varphi - \psi$ accepte toutes les valeurs de $-\frac{\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$, de sorte que φ varie de

$$\psi - \frac{\pi}{2} \text{ à } \psi + \frac{\pi}{2}.$$

Donc $$x = \frac{1}{4\pi a} \int_0^l \int_{\psi - \frac{\pi}{2}}^{\psi + \frac{\pi}{2}} \cos(\varphi - \psi)\, ds\, d\varphi.$$

ψ étant constant chez la première intégration (par rapport à φ), nons pouvons remplacer $d\varphi$ par $d(\varphi - \psi)$, ou, posant $\varphi - \psi = \chi$,

$$x = \frac{1}{4\pi a} \int_0^l \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\chi\, ds\, d\chi.$$

L' intégration par rapport à χ donne

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\chi\, d\chi = \sin\frac{\pi}{2} - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2.$$

Donc $$x = \frac{1}{2\pi a}\int_0^1 ds$$

ou $$x = \frac{1}{2\pi a}$$

c. q. f. d.

Amsterdam, le 19. Septembre 1893.

Et Dobbeltintegral.

Af cand. mag. Niels Nielsen.

---

1. Af den bekendte Formel:

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x).\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

udledes umiddelbart, idet $0 < a < 1$:

$$B(a, a).B(1-a, 1-a) = \frac{\Gamma(a)^2\,\Gamma(1-a)^2}{\Gamma(2a)\,\Gamma(2-2a)} \qquad (1)$$

Idet $a < \frac{1}{2}$ faas $2 - 2a > 1$; altsaa:

$$\Gamma(2-2a) = (1-2a)\,\Gamma(1-2a). \qquad (2)$$

Haves derimod: $a > \frac{1}{2}$, faas:

$$\Gamma(2a) = (2a-1)\,\Gamma(2a-1) = (2a-1)\,\Gamma[1-(2-2a)]. \qquad (3)$$

Nu har man som bekendt, idet $0 < x < 1$:

$$\Gamma(x).\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}.$$

Af (1), (2) og (3) faas da umiddelbart gyldig i begge Tilfælde:

$$B(a, a).B(1-a, 1-a) = \frac{2\pi}{1-2a}\cot a\pi. \qquad (4)$$

2. Man har:

$$B(a, a) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{a-1}\,dx$$

og $$B(1-a, 1-a) = \int_0^1 \frac{dy}{y^a(1-y)^a}$$

Altsaa:

$$\mathrm{B}(a, a) \, . \, \mathrm{B}(1 - a, \; 1 - a) = \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^{a-1}(1 - x)^{a-1}}{y^a (1 - y)^a} \, dx \, dy.$$

Sættes nu $x = \sin^2 \varphi \quad y = \sin^2 \psi$, faas:

$$\mathrm{B}(a, a) \, . \, \mathrm{B}(1 - a, 1 - a) = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos \varphi \sin \varphi}{\cos \psi \sin \psi} \right)^{1-2a} d\varphi \, d\psi;$$

sættes atter φ og ψ for 2φ og 2ψ, faas endelig:

$$\mathrm{B}(a, a) \, . \, \mathrm{B}(1 - a, 1 - a) = \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{\sin \varphi}{\sin \psi} \right)^{1-2a} d\varphi \, d\psi. \qquad (5)$$

Altsaa af (4) og (5):

$$\int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{\sin \varphi}{\sin \psi} \right)^{1-2a} d\varphi \, d\psi = \frac{2\pi}{1 - 2a} \cot a\pi.$$

Novbr. 90.

En Sætning om de cirkulære Funktioner.

Af cand. mag. Niels Nielsen.

---

1. Funktionalligningen

$$f^2(x) + f^2(x + \alpha) = \beta$$

kan uden at paalægge Funktionen eller den Variable den mindste Indskrænkning reduceres til følgende:

$$f^2(x) + f^2(x + \tfrac{1}{2}) = 1. \qquad (1)$$

Sættes i (1) $x + \frac{1}{2}$ for x, faas:

$$f^2(x) = f^2(x + 1)$$

eller:

$$f(x) = \pm f(x + 1).$$

Man har altsaa enten:

1) (2)

} (3)

e

Den almindelige Løsning af (1) er altsaa altid periodisk, og har da enten Perioden 1 eller 2.

2. Dersom $f(\alpha) = 0$, faas af (1):

$$f(\alpha + \tfrac{1}{2}) = \pm 1. \tag{4}$$

Dersom $\mathrm{mod}\,.\,f.\,(\omega) = \infty$, faas af (1):

$$\lim_{x=\omega}\left[\frac{f(x+\frac{1}{2})}{f(x)}\right] = \pm i \tag{5}$$

3. Funktionen $\frac{f(x+\frac{1}{2})}{f(x)} = \varphi(x)$ har altid Perioden 1; den bliver kun 0, for de Værdier af x, der gør $f(x + \frac{1}{2})$ til 0, og kun ∞ for de Værdier af x, der gør $f(x)$ til 0.

Alt, hvad vi hidtil har sagt, gælder om den almindelige Løsning af den forelagte Funktionalligning. Her vil vi nu nøjes med kun at betragte et specielt Tilfælde.

4. Lad os tænke os, at vi deler Planen paa sædvanlig Maade, altsaa ved et System af parallele Linjer med en vilkaarlig Retning og gaaende gennem Punkterne, der fremstiller de hele Tal.

Lad endvidere $f(x)$ fra en af disse Strimler have Nulpunkterne: $a_1\, a_2 \ldots a_p$,
(Ifølge (4) kan man altsaa ikke have: $a_u = a_p + \frac{1}{2}$.)

Alle Nulpunkter for $\varphi(x)$ er da:

$$\tfrac{1}{2} + a_1 + q_1;\ \tfrac{1}{2} + a_2 + q_2; \ldots;\ \tfrac{1}{2} + a_p + q_p$$

og alle Uendelighedspunkter for $\varphi(x)$ er da;

$$a_1 + q_1';\ a_2 + q_2'; \ldots;\ a_p + q_p'$$

hvor Tallene q er vilkaarlige hele Tal.

Men de samme og netop kun de samme Nul- og Uendelighedspunkter har Funktionen:

$$\psi(x) = \cot \pi(x - a_1)\,.\,\cot \pi(x - a_2) \ldots \cot \pi(x - a_p),$$

$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ kan altsaa ingensinde i hele Planen blive 0 eller uendelig.

Forelæsning over Mathematikens Historie

af H. G. Zeuthen.

Oldtid og Middelalder.

(A. F. Høst & Søns Forlag).

(Anmeldt af C. Juel).

Ved Udgivelsen af en Mathematikens Historie i haandterlig Form har Prof. Zeuthen afhjulpet et Savn, der vil være følt her og allevegne, hvor der paa Universiteterne doceres dette Fag. Men Hovedøjemeddet med det Værk, hvis Titel staar over denne Anmeldelse, er ikke væsentlig den at give en Lærebog — skjøndt den ved sin overskuelige Inddeling er særdeles skikket ogsaa dertil — men derimod i en samlet Fremstilling at give et nyt paa egne og andres Forskninger bygget Overblik over de mathematiske Videnskabers Historie, indtil videre gaaende til Middelalderens Slutning.

Forf. henvender sig i sin smukke og letlæselige Fremstilling ikke alene til Fagmænd, men endog hver Mathematikinteresseret, der blot behøver at kjende det mathematiske Pensum, der hos os kræves til examen artium, vil kunne have Fornøjelse og Udbytte af Bogens rige Indhold, og Anmelderen vil opfordre alle Dyrkere af Mathematiken til at læse Prof. Zeuthens nye Bog.

Bogen udkommer ogsaa paa Tysk og vil ved den Opmærksomhed, den ikke kan undlade at vække, ganske vist der finde Anmeldere, der med fuld Indsigt i de historiske Kendsgjerninger, ere i Stand til i Enkeltheder at gjøre Rede for de Fremskridt, denne Bog giver. Nærværende Anmelder, der ikke har gjort Mathematikens Historie til Gjenstand for et særligt Studium, mener selvfølgelig ikke at kunne fremkomme med nogen Kritik, men han ønsker paa ganske enkelte Punkter at gjøre opmærksom paa de Fremskridt i Opfattelsen, som præger Prof. Z's Bog i Forhold til tidligere, idet han dog udtrykkelig advarer mod den urigtige Opfattelse, at de

her fremhævede Dele skulde dominere overfor andre. Sammenligner man det foreliggende Værk med Höfers eller Arneths (der endnu i Anm.'s Studieaar kunde benyttes til Magisterkonferensen) eller endog ved den nyere Hankel, vil man sé, at det ikke alene er Videnskabens systematiske Dele, der i vore Dage ere i frodig Udvikling.

Efter et kort Overblik over Mathematikens tidligste Historie indledes hver af Bogens tre Hovedafsnit: den græske Mathematik, den indiske Mathematik og Middelalderen, hver med en almindelig historisk Orientering, der i høj Grad letter Overblikket. Dette er saa meget mere nødvendigt, som man ikke kan nøjes med en Tidstavle, da man — mærkelig nok — kun kjender meget faa sikkre Aarstal, selv i Perioder, der i andre Henseender ere fuldt chronologisk belyste.

Den græske Mathematik begynder her som overalt med Thales. I al deres Korthed faar man strax af de paa første Side gjorte Bemærkninger Øie for Forskellen mellem de nyere Opfattelser og de ældre mere umiddelbare. Flere af de Sætninger, der tillægges Thales (f. Ex. at en Trekant er bestemt ved en Side og to hosliggende Vinkler) henføres til senere græske Forfattere, der have ment at maatte tillægge Thales dem, da han ellers ikke vilde have kunnet føre Bevis i senere græsk Forstand for visse andre Sætninger, der med Sikkerhed kjendtes og anvendtes af ham.

Blandt disse Anvendelser var den at bestemme Højder ved Skyggemaaling. Atter her gjælder det, at det vel altid har været antaget, at Grækernes Geometri i dens Barndom har været knyttet til Anvendelser, allerede Navnet tyder jo hen derpaa; men det nye træder frem deri, at det hævdes, at denne Forbindelse aldrig fuldstændig er bristet, men at den i hvert Fald gjennem numeriske Regninger har fortsat sig gjennem de store Geometrers Aarhundreder, til den paa et langt senere Tidspunkt atter kommer til at spille en Hovedrolle særlig i Astronomien.

Det hører saaledes til en af Bogens interessanteste Partier, at Forf. i Afsnittet om Kvadratrodsuddragning lærer os at skimte en numerisk Roduddragningsmethode gjennem Euclids i streng geometrisk Form holdte Theoremer.*) Men Forf. mener, at noget saadant ikke er enestaaende, saa at Grækerne paa Euclids Tid meget vel forstod f. Ex. at opløse Ligninger af 1ste og 2den Grad eller af Formen $x^4 + ax^2 + b = 0$ numerisk, naar disses Rødder ere rationale, og at diskutere Røddernes Form i andre Tilfælde. Ganske vist ere de positive Overleveringer herom meget faa, men Forf. ansér Tilstedeværelsen af saadanne Undersøgelser allerede for godtgjorte ved Irrationalitetsbestemmelserne i Euclids Bog, der uden en saadan Forudsætning blive næsten uforklarlige.

Andre Vidnesbyrd kunne hentes fra Elementernes 7vende Bog, der af Hankel opfattes alene som en Levning af en tidligere og ufuldkommen Proportionslære, men af Forf. nærmest karakteriseres som en Fremstilling af de vigtigste almindelige Sætninger til Brug ved Regning med Brøk. Da Forf. paa dette Sted ikke giver Exempler, tør Anm. maaske henvise f. Ex. til Slutningsopgaven 39 hvori der spørges om det mindste Tal, der kan have givne »Dele«, (d. v. s. Halvdele, Tredjedele o. s. v.). Da mindste fælles Multiplum er fuldstændig bestemt tidligere (Stng 34 og 36), kan 39 forstaas som en Anvisning paa Addition af Brøker med Tælleren 1.

I det i mathematisk Henseende vigtigste Tidsrum, blev Hensynet til Praxis imidlertid aldeles fordunklet ved et andet, der af Forf. henføres til Opdagelsen af de irrationale Størrelser. Denne i Sandhed storartede Opdagelse kan jo ikke gjøres af Praktikere, men forudsætter exklusiv videnskabelige Kredse, hvor Hensynet til Nøjagtighed i Udtrykket og Stringens i Bevisførelsen er det ubetinget afgjørende. Denne Stræben siges af Forf. at staa i Forbindelse baade med den græske Mathematiks Hovedstyrke og dens allersvageste Side — dog med

*) Denne [illegible] første Gang fremkom i Prof. Zeuthens Opposition ved Pr[illegible] i Tid[illegible] Math. 1879, S. 145.

stærk Fremhæven af det første Led. I Virkeligheden er det jo umuligt andet end at nære den dybeste Beundring for denne vidunderlige Evne hos Grækerne, der af tidligere Tiders Spekulationer for første Gang formaar i alle Retninger at danne det, der fra det Tidspunkt af stadig kaldes Videnskab. Men netop af den Grund er det overordentlig interessant, saaledes som Forf. omtaler det i Afsnittet om Uendelighedsspørgsmaalet, at eftervise Spor af, at der her har fundet en Udvikling Sted, at der har staaet en videnskabelig Kamp, der hypothetisk knyttes til Differensen mellem den pythagoræiske og den atomistiske Skole, og som rigtignok endte med den sidstes fuldstændige Nederlag. Ved Hypothesen forklares ogsaa den sørgelige Mangel paa alle direkte Overleveringer om Striden, idet de senere Platonikere af fanatisk Fjendskab ødelagde alle de Efterladenskaber fra Atomistikerne, som de kunde faa fat i. I et senere Afsnit om Euclids syvende Bog kommer èn fra Hankel stammende Antydning frem i lignende Retning, idet store Partier af denne Bog, der omhandler Proportionslæren i rationale Tal, kan opfattes som Rudimenter af en tidligere Theori, inden endnu Eudoxos havde skabt den nye Form for Læren om Forhold, der lige godt gjælder om rationale og irrationale Tal.

Den samme Methode Eudoxos benyttede til Brug i Proportionslæren udviklede han ogsaa til andre exakte Bestemmelser af Grænseværdier, og denne Bevismaade, en reductio ad absurdum, har senere faaet Navn af Exhaustionsbeviset. Det var Skik og Brug i Oldtiden at gjengive et saadant Bevis i sin Helhed, hver Gang der var Brug for det. Dette er bleven misforstaaet af nyere Historikere saa at endog den mathematisk gjennemdannede Hankel rent ud benægter, at man for Grækernes Vedkommende kan tale om en Exhaustionsmethode. I Modsætning dertil hævder Prof. Z., at de Gamle fuldstændig havde aabent Øie for, at det var én og samme Methode, de anvendte i forskjellige Tilfælde. Anm. kunde her være tilbøjelig til at gaa videre end Forf. og ligefrem

forsvare Bevisets Gjentagelse som en god logisk Vane. Det er jo nemlig saa, at man kun ved at gjentage Beviset faar at sè, om Betingelserne for Bevisets Gyldighed er tilstede. Ganske vist ere de gængse Arealbestemmelser saa ensartede, at en Gjentagelse var overflødig, men dette gjælder i hvert Fald ikke alle Arkimedes Bestemmelser. De Postulaler, han her opstiller — et af disse er det, at af to Linier mellem samme Punkter, som vende Konvexiteten til samme Side, den yderste er den største — kan han kun have præciseret ved en Gjennemførelse af Beviset, og det kan da ikke ansés for overflødigt at medoptage dette i Texten.*)

De nys nævnte Postulater hos Arkimedes bære forøvrigt Vidne om en ogsaa af Forf. fremhævet mærkelig Mangel hos Grækerne. Det gaar her efter den vistnok almèn gjældende Regel, at man skal gaa til en Retnings største Repræsentant for at faa Grundmanglerne at sè; Fordelene vise sig ogsaa ved de mindre. Den moderne Mathematik har gjort klart, at en krum Linies Længde er noget, der først maa defineres, inden man kan sammenligne den med andre Længder, men herfor har Arkimedes, som man af hans Postulater kan sè, ikke Øie. Paa den anden Side ere disse nødvendige for ham, thi den græske Mathematiker skal og maa have alt ind under det (Euclidiske) Størrelsesbegreb, hvor man direkte kan tale om et Større og et Mindre. Grækerne kom med andre Ord aldrig ud over en af Talklasserne, Mængder, (Tal med absolut Nul, men relativ Enhed) men denne Talklasses Egenskaber havde de den fineste Forstaaelse af. Forøvrigt bunder meromtalte Mangel meget dybt og er væsentlig afhængig af, at en Grænseværdi aldeles ikke behøver at bestemmes baade ved en Række af højere og en Række af lavere Grænsere. Tildels vistnok grundet paa Arkimedes Avtoritet, er denne altfor

*) Det nødvendige i Gjentagelsen kan ogsaa gjøres gældende mod nyere Forfattere; man vil f. Ex. d[illegible] der behøves et særligt Axiom for at kunne overføre det [illegible] Parallelogram fra Kræfter med et rati[illegible] et irrationalt Forhold.

snevre Opfattelse af en Grænsebestemmelse forøvrigt først fuldstændig forsvunden i den allernyeste Tid.

En anden Mangel ved den græske Mathematik, der staar i Forbindelse med det ovennævnte, nemlig Manglen paa Fortegnsregning, skal her kun berøres for at henvise til Prof. Z's Paavisning af, at den geometriske Fremstillingsmaade gjorde Savnet mindre føleligt.

Foruden i Proportionslæren og i den nøjagtige Brug af Exhaustionsbeviset lærer Forf. os paa endnu et andet gjennemgribende Punkt at sè Vidnesbyrd om Grækernes logiske Omhu. Anm. der heri sèr en af Bogens mest karakteristiske Sider, tænker paa den mange Steder tilbagevendende Paavisning af den geometriske Konstruktions Betydning som Existensbevis.*)

Det fremhæves saaledes, at Euclid ikke tør bruge et Liniestykkes Midtpunkt, inden han har konstrueret dette Midtpunkt. Ligesaa hævder Prof. Z., at saadanne Bestemmelser som af Mellemproportionaler ved Hjælp af Archytas Rumkurver ere i Oldtiden blevne forstaaede som Existensbeviser og ikke som teknisk brugelige Konstruktioner. Tidligere Forf.'s (f. E. Chasles') nedsættende Dom om disse Konstruktioner blive derfor uberettigede.

Ogsaa ved Keglesnitslæren spiller samme Synspunkt en Rolle. Læserne af Forfatterens »Keglesnitslæren i Oldtiden« ville erindre, at det var ved væsentlig samme Tankegang, at Prof. Z for første Gang klargjorde Sætningssammenhængen i Apollonius første Bog. Det samme sker i Korthed her, og nu blot som en ny Anvendelse af Synspunktet.

Sidst, men ikke mindst, vil Anm. fremhæve den Indflydelse Opfattelsen har haft paa Forf.'s Fremstilling af Euclids Postulater. Efter deres Form synes disse jo simpelthen at angive, hvilke Konstruktionselementer Euclid vil benytte i det følgende — Cirkel og ret Linie er jo formelt sét definerede i Forvejen. Men disse Definitioner ere rigtignok alene Navnedefinitioner,

*) Se ogsaa Prof. Zeuthen, »Om Konstruktionen som Eksistensbevis i den gamle græske Mathematik« (Nyt Tidssk. f. Math. A, 1892, S. 105.)

og Forf. hævder, at Euclids Mening er den, at først Postulatet om disse Dannelsers konstruktive Existens giver deres geometriske Existens. Postulaterne repræsentere altsaa netop det samme, som vi nu tildags kalde Axiomer.

Af størst Betydning bliver dette for det 5te Postulats Vedkommende (det senere saakaldte Parallelaxiom), der efter de bedste Textrevisioner ubetinget hører hjemme mellem Postulaterne. Dettes Plads mellem Postulaterne er efter ældre Opfattelser uforklarlig, men efter Prof. Z's Synspunkt fremtræder det paa denne Plads næsten som en Nødvendighed, nemlig som Mulighedsbetingelse for Existensen af to Liniers Skæringspunkt. Dettes Existens maa jo nemlig ogsaa postuleres lige saavel som Existensen af en Forbindelseslinie. Forf. bemærker, at der tilsyneladende helt mangler en analog Betingelse for Skæringspunkt mellem Cirkel og ret Linie og mellem to Cirkler,*) men at dette kan lægges ind i — og altsaa muligvis af Euclid er lagt ind, — Definitionen af en Cirkel som en (lukket) Figur. Hvis dette ikke er Tilfældet, staa vi overfor en virkelig Mangel hos Euclid, og det er selvfølgelig ikke Forf.'s Mening at dække over disse, naar de forefindes. Tvertimod bliver hele Euclids System underkastet en meget omhyggelig Kritik, hvormed man f. Ex. bliver klar paa, at det rumgeometriske Grundlag ikke er saa dybt bearbejdet som det plangeometriske.

Ogsaa mod en af de arithmetiske Bøger nemlig den 7de Bog retter Prof. Z. sin Kritik. Man har vel før bemærket enkelte mindre formelle Mangler ved denne Bog, men vistnok slet ikke haft Øie for, at flere af Hovedsætninger overhovedet ikke ere nøjagtig beviste. Forfatteren viser fuldstændig, hvori Fejlen stikker; Anm. vil kun særlig henpege paa 9de Sætning, hvor det logiske Spring skér i hvert Fald første Gang. **)

*) Ved en Sammendragning af de to Betingelsers i én Sætning er denne forøvrigt ikke bleven rigtig udtrykt 107—108.

**) Med lidt andre Betegnelser, men uden nogen Ændring i Tankegangen, kan man [illegible] ningerne inden den 9de har godtgjort, at ma [illegible] c : d, hvor m er positiv hel. [illegible] omvendte, og disse Ting [illegible] sammen.

Uden for det egentlig historiske staar Afsnit 15: Anmærkning om Geometriens Forudsætninger. Dette er skreven med stor Klarhed og Besindighed og giver et godt og tilstrækkeligt Grundlag for Værdsættelsen af Axiomsystemet i forskjellige moderne Lærebøger. Det vilde sagtens være altfor fordringsfuldt at ønske noget lignende gjort for det arithmetiske Axiomsystems Vedkommende, da en Forbindelse mellem Euclid's Forudsætninger og de moderne saakaldte Principer vel kan skimtes, men hele Synspunktet rigtignok i høj Grad har skiftet Karakter.

Naar Anmelderen for ikke at gjøre denne Anmeldelse for lang her skal standse ved at fremhæve flere Ting, som karakterisere Prof. Zeuthens Bog, er Grunden ikke den, at saadanne ikke findes. Man vil saaledes have bemærket, at Anm. ikke har berørt Forf.'s Fremstilling af Forholdet mellem rumlige Steder og Opgaver, saa at sige ikke omtalt hele Keglesnitslæren og ikke nævnt den ret con amore gjennemarbejdede Fremstilling af Arkimedes' Integrationer — Ting, der udførligt og videnskabeligt ere begrundede i Forf. tidligere grundlæggende Værk: Keglesnitslæren i Oldtiden. Ogsaa i de senere Afsnit gjøres forskjellige nye Opfattelser gjældende. Kun skal jeg hvad den videnskabeligt formede indiske (og arabiske) Mathematik angaar endnu nævne, at tidligere Forfatteres Forsøg paa at hævde Uafhængigheden af Grækerne, i Overensstemmelse med nyere Forskninger, ere saa at sige fuldstændig opgivne. Hermed er da Diofants Stilling given. Forf. har tilmed ved at accentuere, at selve det theoretiske Grundlag er det samme hos ham, som hos Euclid, og at Opgaver i diofantisk Manèr ogsaa findes fra en ældre Tid, givet et Fingerpeg, som muligvis kan udbyttes.

Fremstillingen af Mathematikens Gjenopvækkelse i Europa gaar til Tidspunktet før Trediegrads-Ligningens Løsning, idet Forf. ender sit Værk med den smukke Slutningsbemærkning, at Gjennembruddet skèr, da man ved Løsningen af en Opgave,

som Grækere og Arabere havde maattet lade ligge, fik en ny og hidtil ukjendt Tillid til egne Kræfter.

Vi have Grund til at være Prof. Zeuthen taknemmelige for dette Bidrag til vor mathematiske Litteratur, der overalt vil blive værdsat som et betydeligt Værk over Mathematikens Historie.

Vi have imidlertid tillige særlig Grund til at glæde os over, at den hos os vil brugt som Lærebog for yngre Mathematikere: de historiske Fakta givne i en saa overskuelig og interessant Form vil virke ansporende baade i videnskabelig og — ikke mindst — i pædagogisk Henseende. Tillige vil et Værk som dette være et fortrinligt Middel til at modarbejde den Opfattelse, at Mathematikens Formaal væsentlig eller endog udelukkende skulde være det, at udvikle en isoleret staaende Færdighed. Et og andet som f. Ex. et saa smukt Overblik som det, der gives i Afsnittet om den analytisk-synthetiske Fremstillingsform, har ogsaa direkte Interesse udover det specielt mathematiske.

Litteratur-Anmeldelse.

Codex Leidensis 399,1.

Euclidis Elementa ex interpretatione Al-Kadschdschadschii cum commentariis Al-Narizii arabice et latine ediderunt notisque instruxerunt B. O. Besthorn et J. L. Heiberg. Partis I. fasc. I. (Hauniae in libraria Gyldendaliana.)

af en arabisk Oversættelse af Euclids sex
; tilføjet latinsk Text) hidrørende fra
t Codex i Leydens Bibliothek, have
thematikensHistorie en stor Tjeneste.
let for Mathematiken er saa stor, at
nmelig for ethvert Bidrag til Erkjen-

delsen af Opfattelsen af ham i forskjellige Tider, og denne Commentar synes at frembyde adskilligt af Interesse. Det væsentligste ved en saadan Udgivelse er naturligvis, at den er fuldt paalidelig, og i den Henseende yde Udgivernes Navne, Besthorn og Heiberg, den bedste Garanti, man overhovedet kan forlange. Det fortrinligt udstyrede Værk udkommer med Understøttelse fra Carlsbergfondet. (C. J.)

Éléments de la théorie der fonctions elliptiques par Jules Tannery et Jules Molk t. I. Introduction. Calcul differentiel (1re partie) (X, 246 prix fr. 7,50).

Ovennævnte Værk er 1ste Bind af en Fremstilling af de elliptiske Funktioners Theorie. Den vil derfor være udførlig nok til at omfatte Theoriens væsentligste Dele, ligesom ogsaa forskjelligartede Anvendelser ifølge Planen skulle afslutte Værket (4de Del). Forfatterne antage Hovedsætningerne om Integraler af Funktioner med complexe Variable for bekjendte, men give i den ret udførlige Indledning de Dele af Theorien for Rækker og Produkter, samt for hele analytiske Funktioner, som der i det følgende bliver Brug for. At dette er fortrinligt og overskueligt fremstillet følger jo allerede af Forfatternes paa dette Punkt meget bekjendte Navne. Den Methode, der ubetinget benyttes, er den Weierstrassiske. I Halphén's bekjendte og mærkelige Bog har man jo nok haft noget til en vis Grad lignende, men dels er den jo ikke fuldført, dels er den paa Grund af sit halvt elementære, halvt strængt videnskabelige Præg ikke hurtig at arbejde sig igjennem. I Virkeligheden ville vel alle, der ønske at sætte sig ind i de elliptiske Funktioners Theori, have et større eller mindre Kjendskab til den almindelige Funktionslære, og det er da tilfredsstillende at faa Brug derfor. Naar nu ovennævnte Forff. paa en særdeles smuk og overskuelig samt hurtigt fremadskridende Maade bygge hele Theorien paa Weierstrass' Methode, er

denne vistnok derved slaaet fuldstændig igjennem i Lærebogslitteraturen, og dette betyder i Virkeligheden en stor Lettelse.

Indholdet af 1ste Bind omfatter foruden den ovennævnte Indledning og almindelige Sætninger om dobbelt periodiske Funktioner, Læren om σ Funktionen defineret ved sin Produktudvikling samt de deraf udledede, saaledes, at Læren om Transformationen af σ Funktionerne medtages.

(C. J.)

Løste Opgaver.

35. Hvilken Kurve maa man lade rulle paa en ret Linie, for at et Punkt i fast Forbindelse med den rullende Kurve kan beskrive en Cirkel.

(Iversen.)

Opløsning. Låt (x, y) vara ett fixt koordinatsystem och (ξ, η) ett rörligt med origo i punkten (x, y), samt låt den sökta kurvan referera sig till dets senare. Låt vidare x-axeln vara den linie, utefter hvilken kurvan rullar, samt (x, y) den punkt, som beskrifver en cirkel, hvars ekvation maa vara

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = c^2. \qquad (1)$$

Om θ är vinkeln mellan x- och ξ-axlarna, och vridningen försiggår i positiv led, samt (x, o) och (ξ, η) tangeringspunktens koordinater i de båda systemen, så erhålles, då man iakttar, att

$$\operatorname{tang} \theta = -\frac{d\eta}{d\xi} = -\eta',$$

$$\left.\begin{aligned} y &= -\frac{dx}{d\theta} = -\xi \sin\theta - \eta\cos\theta = \frac{\xi\eta' - \eta}{\sqrt{1+\eta'^2}} \\ x_1 - x &= -\frac{dy}{d\theta} = \xi\cos\theta - \eta\sin\theta = \frac{\xi + \eta\eta'}{\sqrt{1+\eta'^2}} \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Genom differention af (1) och elimination af x — a erhålles

$$(y - b)^2 \left\{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2\right\} = c^2 \left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2,$$

och

$$\left\{\xi\eta' - \eta - 6\sqrt{1+\eta'^2}\right\}^2 (\xi^2 + \eta^2) = c^2 (\xi\eta' - \eta)^2.$$

Införas polarkoordinater genom att sätta

$$\xi = r\cos\omega, \quad \eta = r\sin\omega,$$

öfvergår denna ekvation till

$$d\omega = \frac{b\,d\,r}{r\sqrt{(r \mp c)^2 - b^2}}.$$

Häraf erhålles efter lämplig bestämning af integrationskonstanten:

1) $b^2 < c^2$

$$\frac{c^2 - b^2}{r} = \frac{b}{2}\left\{e^{\frac{\sqrt{c^2-b^2}}{b}\omega} + e^{-\frac{\sqrt{c^2-b^2}}{b}\omega}\right\} \pm c,$$

2) $b^2 = c^2$

$$r = \pm \frac{2c}{1 - c^2\omega^2},$$

3) $b^2 > c^2$

$$\frac{b^2 - c^2}{r} = b\cos\left(\sqrt{b^2 - c^2}\,.\,\omega\right) \mp c.$$

(Edvard Göransson.)

(En anden rigtig Løsning er indsendt af H. S. Nielsen.)

42. En Omdrejningsflade frembringes af en Cirkel, der drejer sig om en lodret Axe, der er parallel med Cirklens Plan, men hvis Projektion paa denne Plan ikke indeholder Centret. Konstruer med Passer og Lineal 1) de Dobbelttangentplaner, 2) de Dobbelttangenter til Fladen, der gaa gjennem et givet Punkt. (C. J.)

Opløsning. 1) Dobbelttangentplanerne bestemmes paa følgende Maade:

Røringspunkterne for en Dobbelttangentplan maa ligge paa Parallelcirkler, hvis Tangentkegler ere sammenfaldende, og som ligge symmetrisk med Hensyn til en vandret Plan gjennem Fladens Centrum. Det gjælder da om paa den givne Cirkel at opsøge Punktpar, der ligge symmetrisk med Hensyn til denne Plan, og i hvilke Fladen har Tangentplaner, der

enten ere sammenfaldende, eller hvis de ere adskilte, da symmetrisk beliggende m. H. t. den nævnte Plan gjennem Centrum. I det første Tilfælde maa Tangentplanerne falde sammen med Cirklens Plan, og dersom man drejer denne om Axen, og til den indhyllede Cylinderflade lægger Tangentplaner, da give disse 2 af de omspurgte Dobbelttangentplaner.

I det andet Tilfælde faas følgende:

Er X et af de søgte Punkter paa Cirklen, C Fladens Centrum, medens XT er det Stykke af Cirklens Tangent (i X), der ligger mellem X og Skæringspunktet med den vandrette Plan gjennem C, da skal $\angle$ XCT være ret. Derved finder man let X, Idet man blot halverer den Vinkel, hvor under Cirklens vandrette Billede ses fra C's vandrette Billede (C_v); dette giver X_v. Fladens Tangentplan i X drejes derpaa om Axen og indhyller da en Kegleflade, hvis Tangentplaner fra det givne Punkt give 2 andre Løsninger af Opgaven. Der gives altsaa ialt 4 Løsninger.

[2]) Det givne Punkt drejes om Axen ind i Cirklens Plan og fra dets 2 nye Stillinger drages Tangenter til Cirklen. Disse ville ved at drejes om Axen frembringe Rotationshyperboloider, der hver røre den givne Flade langs to med Hensyn til den vandrette Plan gjennem Centrum symmetriske Parallelcirkler, og som alle gaa gjennem det givne Punkt. Gjennem dette drages Frembringere i Hyperboloiderne, og man har 8 Dobbelttangenter. (Johannes Petersen.)

Rettelse.

En Abonnent har gjort os opmærksom paa, at Opgave 376 i »Tidsskrift for Mathematik«, der dér var opført blandt de uløste Opgaver og her gjenoptaget som Nr. 16, i Virkeligheden allerede er løst i Tidsskriftet, Aargang 1886, S. 29. — Den bortfalder derfor.